Adjunktenformel der inversen Matrix

$A_{(n,n)} = (a_{ij})$ sei n-reihige Matrix mit $detA \neq 0$ und $a^*_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$

Dann gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}(a^*_{ij})^T$$

Das heißt: A^{-1} existiert, wenn $detA \neq 0$. Solche Matrizen heißen regulär.
Wenn $detA = 0$, dann heißt A singulär.

<u>Beispiel</u>: Gesucht ist die Inverse von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen zunächst die Determinante von A (falls sie Null ist, brauchen wir gar nicht weitermachen). Zur Übung wird eine Entwicklung nach der 1. Spalte durchgeführt:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8 + 12 = 4 \neq 0.$$

Jetzt werden die $k_{i,j}$ bestimmt (Vorzeichen beachten!)

$$\begin{aligned}
k_{1,1} &= +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8, & k_{1,2} &= -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2, & k_{1,3} &= +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6, \\
k_{2,1} &= -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 6, & k_{2,2} &= +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, & k_{2,3} &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3, \\
k_{3,1} &= +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2, & k_{3,2} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1, & k_{3,3} &= +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.
\end{aligned}$$

Schließlich ergibt sich die Adjungierte als Transponierte von $K = (k_{i,j})$. Bis auf den Vorfaktor $\frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{4}$ ist das schon die Inverse:

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \underbrace{\begin{pmatrix} -8 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}}_{=A_{adj}}. \qquad \square$$