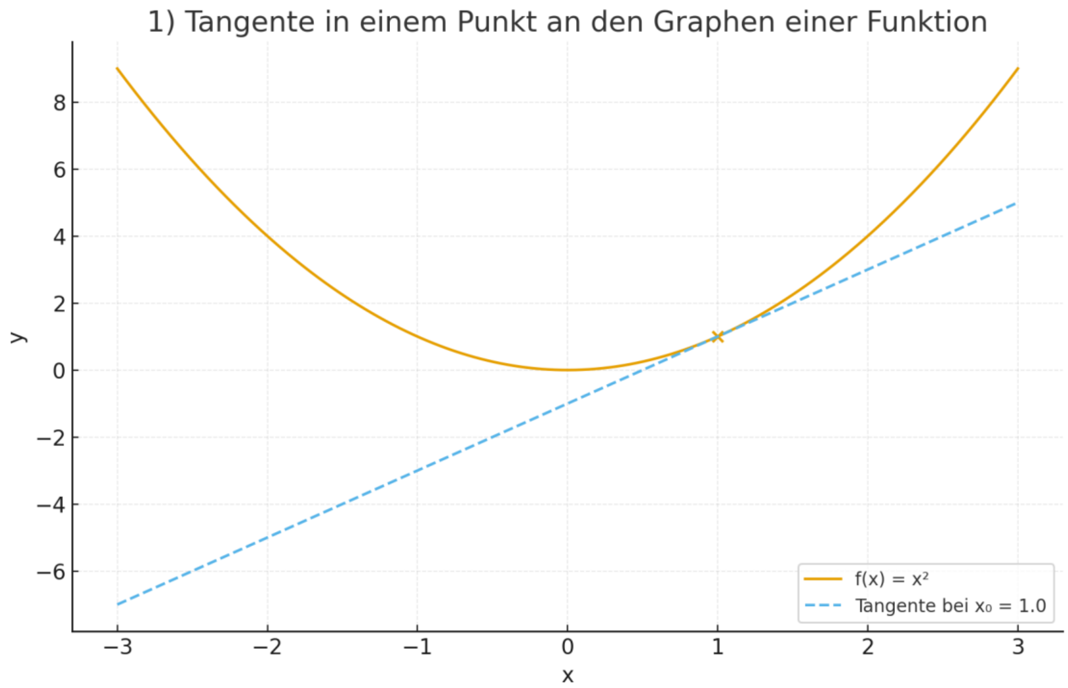
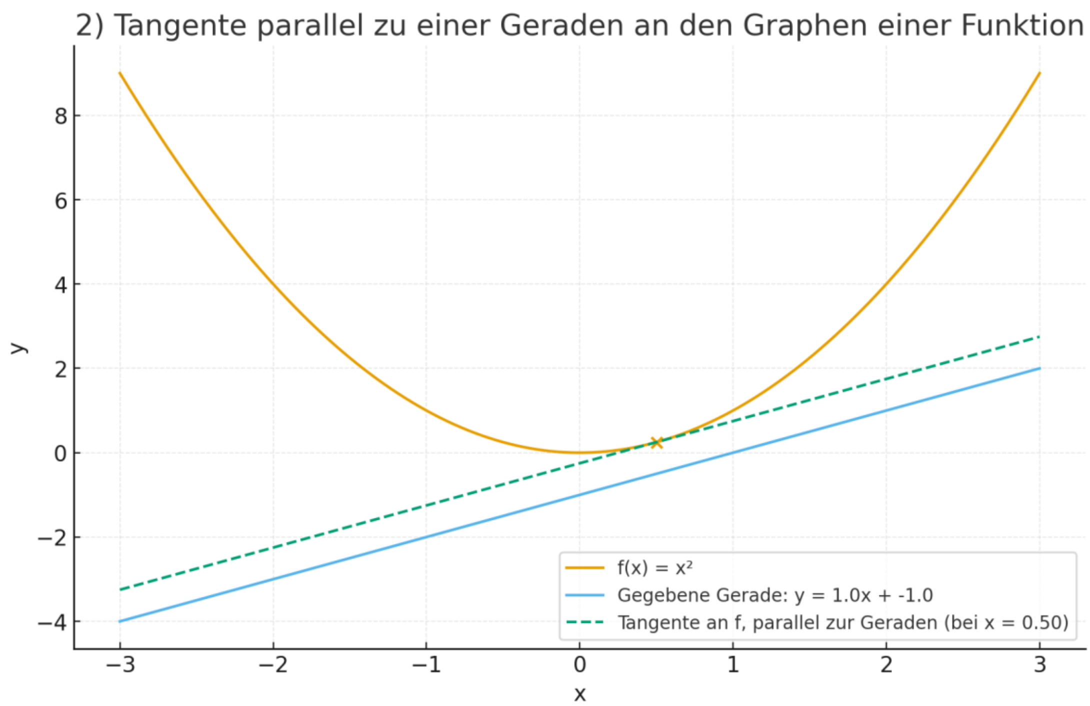
Differenzialrechnung

Was sind Tangenten?

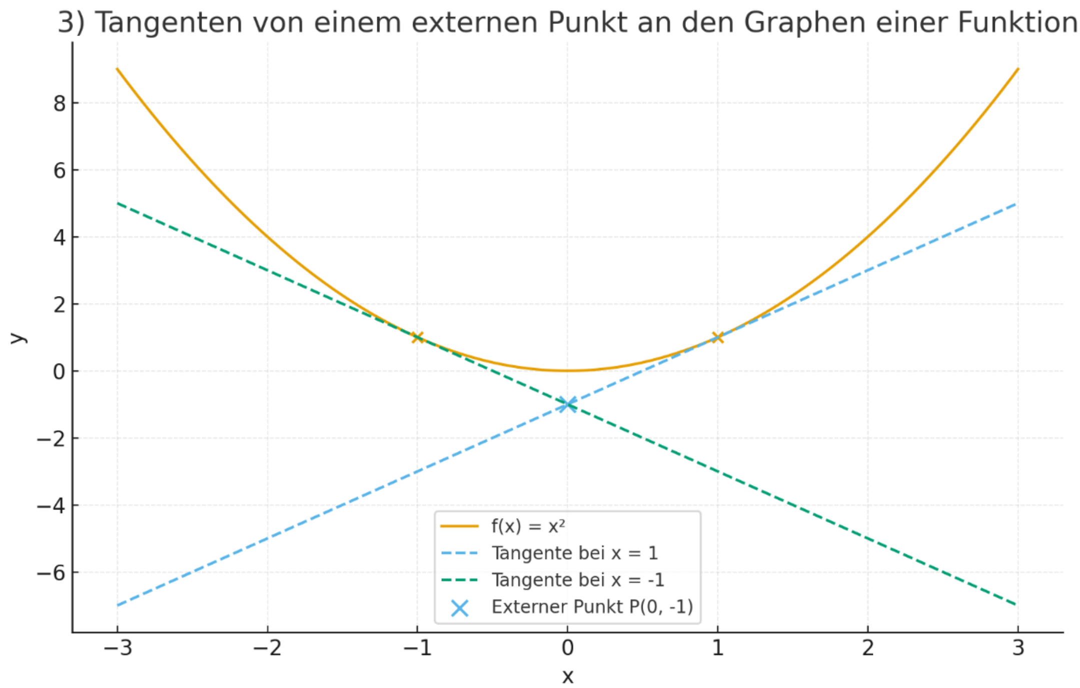
Fall 1: Tangente in einem Punkt des Graphen von f(x)



Fall 2: Tangente parallel zu einer Geraden an die Graphen von f(x)



Fall 3: Tangente von einem „externen“ Punkt an den Graphen von f(x)



Wie berechnen wir diese?

Die allgemeine Gleichung einer linearen Funktion (und die Tangente ist ja eine lineare Funktion) lautet bekanntlich:

$y = f(x) = m \cdot x + n.$

Betrachten wir eine Funktion $f(x)$, die in einem Punkt, nennen wir ihn x_0 differenzierbar ist. Somit hat der Graph von $f(x)$ im Punkt $P(x_0|f(x_0)$ eine eindeutige Tangente.

Die Steigung der Tangente in diesem Punkt ist m . Das ist aber nichts anderes als die 1. Ableitung von $f(x)$ an dieser Stelle, also $f'(x_0)$

Jetzt erinnern wir uns an die Formel

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$

Mit $m = f'(x_0)$

Kommen wir zur allgemeinen Tangentengleichung:

$$y_{Tangente} = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Hinweis: Fall 3 wird im 2. Semester des Studienkollegs nicht unterrichtet und ist somit auch nicht relevant für Klausuren/FSP.

Glossar für Interessierte – Anwendung in der Ökonomie:

Die Tangentenlösung, auch als tangentiales Verfahren bekannt, ist eine wichtige Methode zur Berechnung und Approximation mathematischer Funktionen. Sie wird insbesondere in der Finanzanalyse eingesetzt, um komplexe Probleme in der Momentenanalyse zu lösen.

Um die Tangentenlösung zu verstehen, ist es zunächst wichtig, das Konzept der Ableitung in der Differentialrechnung zu erläutern. Die Ableitung beschreibt die Steigung einer Funktion an einem bestimmten Punkt. Durch das Ableiten einer Funktion können wir Informationen über deren Entwicklung und Verhalten erhalten.

Die Tangentenlösung nutzt diese Informationen, um die Funktion an einem bestimmten Punkt approximativ darzustellen.

Sie basiert auf der Annahme, dass eine Funktion durch eine Gerade, die Tangente, an einem bestimmten Punkt gut repräsentiert werden kann. Dabei wird der Verlauf der Funktion durch die Steigung dieser Tangente beschrieben.

In der Finanzanalyse wird die Tangentenlösung häufig in der Portfoliotheorie angewendet.

Des Weiteren findet die Tangentenlösung Anwendung bei der Bestimmung von Anlagestrategien, insbesondere des Capital Asset Pricing Model (CAPM). Das CAPM ist ein weit verbreitetes Modell zur Bewertung von Aktien und Anlagen. Es ermöglicht Investoren, das erwartete Risiko einer Anlage unter Berücksichtigung des systematischen Risikos zu bewerten. Durch die Verwendung der Tangentenlösung können Anleger das optimale Verhältnis zwischen risikofreier Rendite und systematischem Risiko ermitteln, um fundierte Investmententscheidungen zu treffen.

In der Praxis werden bei der Tangentenlösung numerische Verfahren verwendet, um die Steigung der Tangente zu berechnen. Diese Verfahren umfassen unter anderem das Newton-Verfahren.
Durch die Verfeinerung dieser numerischen Berechnungen kann die Tangentenlösung immer genauer approximiert werden.

Die Tangentenlösung ist somit ein unverzichtbares Instrument für die Finanzanalyse und ermöglicht es Investoren, fundierte Entscheidungen auf der Grundlage mathematischer Modelle zu treffen.

Hierzu sind mittlerweile auch leistungsstarke KI Algorithmen verfügbar

QR-Code Newton-Verfahren

QR-Code Momentenanalyse- Momentenmethode

Zurück zur Studienkolleg Mathematik 😊

Übungsaufgaben:

1. Stellen Sie die Gleichung der Tangenten an f im Punkt P auf!
   a. $f(x) = x^3$ P(2/8)
   b. $f(x) = -20x^4 + 30x$ P(1/10)
   c. $f(x) = -x^2 + 3x + 1$ P(−2/−9)
   d. $f(x) = 2x^5 + 3x^4 + 2x^2 + 10$ P(−1/13)

2. Stellen Sie die Gleichung der Tangenten an f in x_0 auf!
   a. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 8x$ $x_0 = 3$
   b. $f(x) = 2x^4 - 6x^2 + 2x - 5$ $x_0 = 0$
   c. $f(x) = -x^6 + 2x^4 - 2x^2$ $x_0 = -2$

3. Wo schneidet die Tangente an f im Punkt P die x-Achse?
   a. $f(x) = -x^2 + 5x + 3$ P(3/9)
   b. $f(x) = 2x^5 - 4x^3 + 6$ P(−1/8)

4. In welchem Punkt hat die Tangente an f(x) die gleiche Steigung wie g(x)?
   a. $f(x) = 4x^2 - 10x + 3$ $g(x) = 6x + 7$
   b. $f(x) = -6x^3 + 4x^2 - 9$ $g(x) = -x + 15$
   c. $f(x) = 6x^5 + 2x^3 - 6x + 12$ $g(x) = -12x + 20$

5. Berechnen Sie die Zahl $r \in \mathbb{R}$ so, dass die Tangente an f(x) in x_0 die gleiche Steigung hat wie g(x)!
   a. $f(x) = 4x^2 + 3x - 7$ $g(x) = rx + 4$ $x_0 = 2$
   b. $f_r(x) = rx^2 + 6x - 8$ $g(x) = -5x + 8$ $x_0 = -1$
   c. $f_r(x) = -6x^3 + rx$ $g(x) = 2x + 4$ $x_0 = 5$

Lösungen nur im Unterricht