Differenzialrechnung

Der Preis ist elastisch, wenn der Betrag der Preiselastizität der Nachfrage größer als 1 ist

(|ε| > 1).

Der Preis ist unelastisch, wenn der Betrag der Preiselastizität der Nachfrage kleiner als 1 ist.
(|ε| < 1).

Das bedeutet, dass die nachgefragte Menge überproportional stark auf Preisänderungen reagiert. Eine Preissenkung führt dann zu einem größeren Mengenanstieg, und eine Preiserhöhung zu einem größeren Mengenrückgang.

Mathematische Definition (Allgemein)

Die **Elastizität** E einer Funktion $f(x)$ bezüglich der Variablen x ist definiert als:

$$E = \frac{\text{relative Änderung von } f(x)}{\text{relative Änderung von } x} = \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)}$$

Anwendung in der Ökonomie: Preiselastizität der Nachfrage

Ein klassisches Beispiel ist die **Preiselastizität der Nachfrage**, also wie stark sich die Nachfragemenge $N(p)$ bei einer Preisänderung p verändert:

$$\varepsilon(p) = \frac{N'(p) \cdot p}{N(p)}$$

Merke:

- $\varepsilon(p) > |1|: elastisch\ (starke\ Reaktion\ der\ Nachfrage\ auf\ Preisänderungen$
- $\varepsilon(p) = |1|: Einheitselastizität$
- $\varepsilon(p) < |1|: unelastisch\ (geringe\ Reaktion\ der\ Nachfrage\ auf\ Preisänderungen$

Die Einheitselastizität wird auch unitäre Elastizität (in der VWL) genannt.

Grundsätzlich gilt: die relative Änderung der abhängigen Größe ist genau gleich wie die relative Änderung der unabhängigen Größe.

Typisches Beispiel aus der Wirtschaftslehre (schwer)

Bei der Nachfrage nach einem bestimmten Gut werde der Zusammenhang zwischen dem Preis p und der nachgefragten Menge x des Gutes durch folgende Funktion angegeben:

$$p(x) = 10 \cdot e^{(-2x+4)\cdot x}$$

Bestimmen Sie die Mengen, bei der die Elastizität $\varepsilon(p)$ eine Einheitselastizität aufweist.

$p \; in \; [GE] \; und \; x \; in \; [ME][$

Mögliche Lösungen:

Hinweis: Elastizität:

$$\varepsilon_f(x) = \frac{df}{dx} \cdot \frac{x}{f(x)} = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$$

Hinweis: Hier verwendete Ableitungsregeln:
Seien g und h differenzierbare und reelle Funktionen, dann gilt:
Kettenregel

$$(g \circ h)'(x) = (g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Berechnung der Elastizität

$$\varepsilon_p(x) = p'(x) \cdot \frac{x}{p(x)}$$

$$= \left(10e^{(-2x+4)x}\right)' \cdot \frac{x}{10e^{(-2x+4)x}}$$

Verwendung der Kettenregel:

$$= ((-2x+4)x)' \, 10e^{(-2x+4)x} \cdot \frac{x}{10e^{(-2x+4)x}}$$

$$= \left(-2x^2+4x\right)' \, 10e^{(-2x+4)x} \cdot \frac{x}{10e^{(-2x+4)x}}$$

$$= (-4x+4) \cdot x$$

$$= -4x^2 + 4x$$

Bestimmung der Menge mit $\varepsilon_p(x) = 1$:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_p(x) &&= 1 \\
\Leftrightarrow\ & -4x^2 + 4x &&= 1 \\
\Leftrightarrow\ & -4x^2 + 4x - 1 &&= 0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 1x + \frac{1}{4} &&= 0
\end{aligned}$$

Verwendung der pq-Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{(-1)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \pm 0$$

Somit ist $\varepsilon_p(x) = 1$ bei $x = \frac{1}{2}$.
Bestimmung der Menge mit $\varepsilon_p(x) = -1$:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_p(x) && = -1 \\
\Leftrightarrow\ & -4x^2 + 4x && = -1 \\
\Leftrightarrow\ & -4x^2 + 4x + 1 && = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 1x - \frac{1}{4} && = 0
\end{aligned}$$

Verwendung der pq-Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{(-1)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

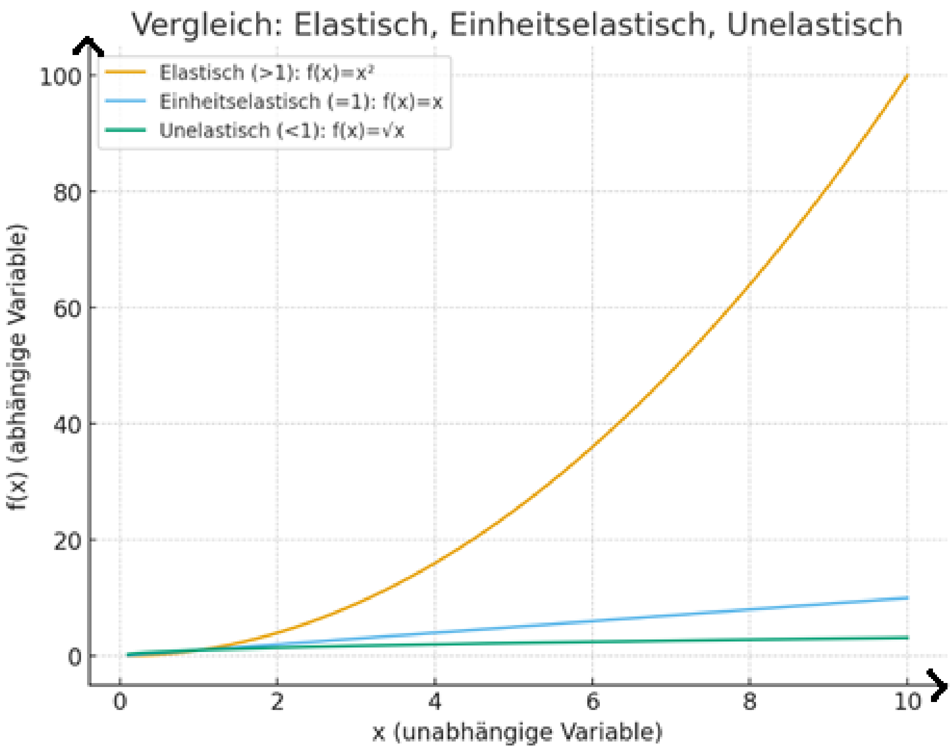
Somit ist $\varepsilon_p(x) = -1$ bei $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Antwortsatz:

a) Wir erhalten eine Einheitselastizität (+1) bei $x = \frac{1}{2}$

b) Wir erhalten eine Einheitselastizität (-1) bei $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$

Allgemeine Veranschaulichung typischer Funktionen $f(x)$



Beispiel Fall unelastisch

$f(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

Somit

$\varepsilon_f(x) = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)} \rightarrow \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x}} = 0{,}5$ damit unelastisch