Beispiel zur vollständigen Kurvendiskussion einer gebrochen rationalen Funktion

Gegeben sei die Funktion:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 2}$$

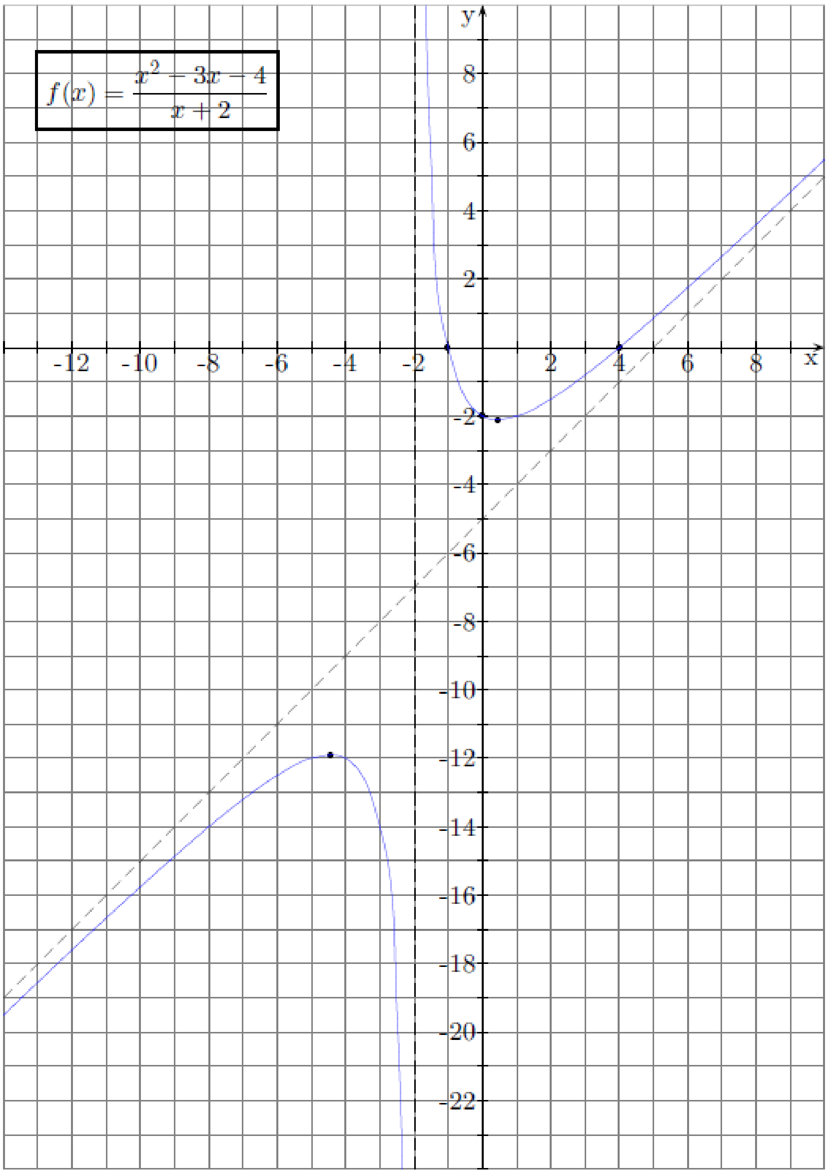


Schaubild der Funktion

|

a) Definitionsbereich

Man erkennt, dass der Nenner bei x = 2 Null wird. Der Zähler ist bei diesem x-Wert nicht Null.

Daher gilt für den Definitionsbereich:

$$D: \{x \in R \ \backslash -2\}$$

Gern auch andere Schreibweisen, z.B. $D: \{x \in R; x \neq 2\}$

Die Definitionslücke beschreibt eine Polstelle

$$\text{Senkrechte Asymptote:} \quad x = -2 \text{ (ungerader Pol)}$$

Man definiert diese als Polstelle **mit wechselndem Vorzeichen**.

Ausblick 2. Semester (Grenzwertbetrachtungen):
Wir nähern uns der -2 von links, also kleiner -2:

$$\lim_{x \overset{<}{\to} -2} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} -2} \frac{\overbrace{x^2 - 3x - 4}^{\to 6}}{\underbrace{x + 2}_{\overset{<}{\to} 0}} = -\infty$$

Wir nähern uns der -2 von rechts, also größer -2:

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -2} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} -2} \frac{\overbrace{x^2 - 3x - 4}^{\to 6}}{\underbrace{x + 2}_{\overset{>}{\to} 0}} = +\infty$$

$$\text{Linksseitiger Grenzwert für } x \to -2: \quad \lim_{x \overset{<}{\to} -2} f(x) = -\infty$$

$$\text{Rechtsseitiger Grenzwert für } x \to -2: \quad \lim_{x \overset{>}{\to} -2} f(x) = +\infty$$

b) Schnittpunkt mit den Koordinatenachsen

Um die Nullstellen der Funktion f und damit die Schnittpunkte mit der x-Achse zu finden, muss man den Zähler gleich 0 setzen.

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

Routinemäßig verwendet man bei solchen quadratischen Gleichungen die beliebte „Mitternachtsformel“ oder die „p/q-Formel“ (siehe Tafelwerk)

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

Eleganter wäre allerdings die Zerlegung in Linearfaktoren: (Faktorisierung)

$$x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$$

Die Schnittpunkte mit der x-Achse ($S_{x1...n}$) können wir aus der o.g. Funktion ablesen:

S_{x1} = (-1 | 0)
S_{x2} = (4 | 0)

Den Schnittpunkt mit der y-Achse (S_y) berechnen wir, indem wir die Funktion

$$f\ (0)$$

bilden.

S_y = (0 | -2)

c) Extremstellen (2.Semester)

Definition:
Extremstellen einer Funktion, sind Stellen, an denen die Steigung (der gedachten Tangente an den Graphen dieser Funktion) „0“ ist, d.h. diese Tangenten wären parallel zur Abszisse oder die Abszisse selbst.
Die Steigung einer Funktion an einer beliebigen Stelle (vorausgesetzt, die Funktion ist im zu betrachtenden Intervall integrierbar) bestimmen wir mit der ersten Ableitung.

$$f'(x_E) = 0$$

Um rechnerisch bestimmen zu können, ob es sich um ein lokales Minimum oder Maximum handelt, betrachten wir das Krümmungsverhalten der Funktion an der Stelle des Extremums.
Bei einer Rechtskrümmung ist die zweite Ableitung < 0 und bei einer Linkskrümmung entsprechend > 0.

$$f''(x_E) < 0 \ \rightarrow \ lokales\ Maximum$$

$$f''(x_E)\ > 0 \ \rightarrow \ lokales\ Minimum$$

Sonderfall:

$$f''(x_E)\ ist\ ebenfalls\ =\ 0\ \rightarrow Sattelpunkt$$

Diesen Sonderfall behandeln wir separat.

Die Ableitung der Funktion (Anwendung der Quotientenregel):

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+2)\cdot(2x-3)-(x^2-3x-4)\cdot 1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{2x^2-3x+4x-6-x^2+3x+4}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x^2+4x-2}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

$$\text{1. Ableitung:} \quad f'(x) = \frac{x^2+4x-2}{(x+2)^2}$$

$f'(x) = 0$ liefert uns die *Extrem**stellen*** $x_{E1} = (-\sqrt{6}-2)$
$x_{E2} = (+\sqrt{6}-2)$

Anmerkung:

Die *Extrem**punkte*** haben somit die Koordinaten

$E_1{:}\,(\,x_{E1}\,|\,f(x_{E1}\,)$
$E_2{:}\,(\,x_{E2}\,|\,f(x_{E2}\,)$

Da wir im Folgenden die zweite Ableitung auch noch benötigen, wenden wir die Quotientenregel neuerlich an:

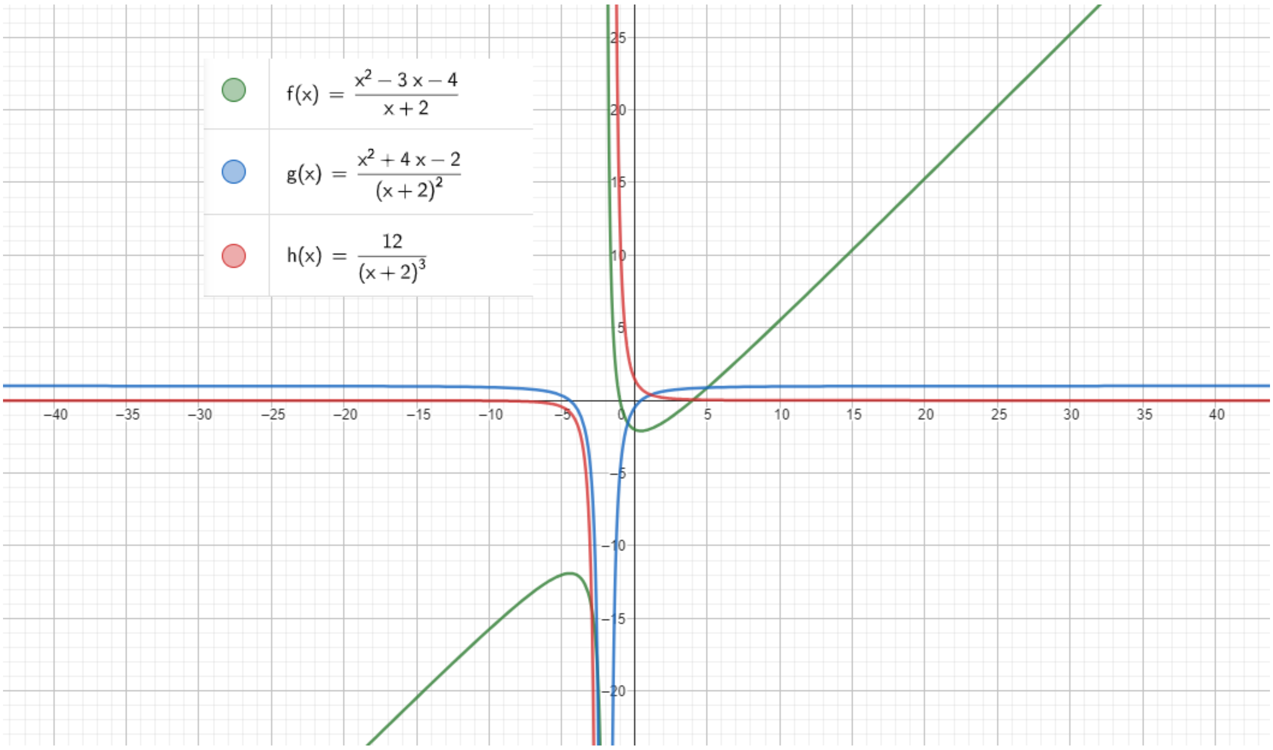
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(x+2)^2\cdot(2x+4)-(x^2+4x-2)\cdot 2(x+2)\cdot 1}{(x+2)^4} \\ &= \frac{(x+2)[(x+2)(2x+4)-(x^2+4x-2)\cdot 2]}{(x+2)^4} \\ &= \frac{(x+2)(2x+4)-(x^2+4x-2)\cdot 2}{(x+2)^3} \\ &= \frac{2x^2+4x+4x+8-2x^2-8x+4}{(x+2)^3} \\ &= \frac{12}{(x+2)^3} \end{aligned}$$

$$\text{2. Ableitung:} \quad f''(x) = \frac{12}{(x+2)^3}$$

d) Wendestellen (2.Semester)

Definition:
Wendestellen einer Funktion, sind Stellen, an denen die Steigung (positiv oder negativ) der Funktion am größten ist.
D.h. die zweite Ableitung einer Funktion ist die Extremstelle der ersten Ableitung dieser Funktion.

Graphische Veranschaulichung:



$$g(x) = f'(x)$$
$$h(x) = f''(x)$$

Die erste Ableitung (blauer Graph) hat zwei Nullstellen. → zwei Extremstellen
Die zweite Ableitung (roter Graph) hat keine Nullstelle. → keine Wendestelle

e) Monotonie

Da die Extremstellen berechnet wurden, können wir eine Monotonie - Tabelle erstellen:

	$x < -\sqrt{6} - 2$	$-\sqrt{6} - 2 < x < -2$	$-2 < x < \sqrt{6} - 2$	$x > \sqrt{6} - 2$
$f'(x)$	>0	<0	<0	>0
$f(x)$	s.m.s	s.m.f	s.m.f	s.m.s

f) Krümmungsverhalten (2.Semester)

Wie man am Zähler sieht, kann die zweite Ableitung $f''(x)$ nicht den Wert 0 annehmen.
Das Vorzeichen von $f''(x)$ kann also höchstens an der Definitionslücke wechseln.

Daher treten in der

	$x < -2$	$x > -2$
$f''(x)$	<0	>0
$f(x)$	rechtsgekrümmt	linksgekrümmt

Tabelle zum Krümmungsverhalten nur zwei Bereiche auf.

g) Schiefe Asymptoten (2.Semester)

Da der Zählergrad um eins höher ist als der Nennergrad können wir eine schiefe Asymptote erwarten.
Diese berechnen wir mit Hilfe der *Polynomdivision.*

$$\begin{array}{rrrl}
(x^2 & -\ 3x & -\ 4) & : \ (x+2) = x-5+\dfrac{6}{x+2} \\
x^2 & +\ 2x & & \\
\hline
 & -\ 5x & -\ 4 & \\
 & -\ 5x & -\ 10 & \\
\hline
 & & 6 &
\end{array}$$

für $\lim x \to \infty$ können wir als schiefe Asymptote $y = x - 5$ verwenden

h) Symmetrie um einen Punkt ($x_o|y_o$) (2.Semester)

Auf den ersten Blick ist keine Symmetrie erkennbar. Da die Grenzwerte für x → −∞ und x → +∞ verschieden sind, kommt höchstens Punktsymmetrie in Frage, und zwar nur dann, wenn das Symmetriezentrum zugleich auf beiden Asymptoten (mit den Gleichungen x = −2 und y = x − 5) liegt.

Die allgemeine Formel für Punktsymmetrie um den Ursprung wird als bekannt vorausgesetzt:

$$f(-x) = -f(x)$$

Schiefe Asymptote: $y = x - 5$

Daher wird zunächst der Schnittpunkt dieser Asymptoten ermittelt.

x = −2 eingesetzt in y = x − 5 → y = −2 − 5 = −7

Schnittpunkt der Asymptoten: (−2| − 7)

Allgemeine Bedingung für Punktsymmetrie bezüglich ($x_0|y_0$):

$$f(x_0 - h) + f(x_0 + h) = 2y_0$$

$$\begin{aligned} & f(-2-h)+f(-2+h) \\ = \ & (-2-h)-5+\frac{6}{(-2-h)+2}+(-2+h)-5+\frac{6}{(-2+h)+2} \\ = \ & -14-\frac{6}{h}+\frac{6}{h}=-14=2\cdot(-7) \end{aligned}$$

Punktsymmetrie bezüglich des Punktes $(-2|-7)$

Jetzt fehlt nur noch der Wertebereich!

Wenn wir uns das Schaubild der Funktion ansehen, stellen wir fest, dass die Funktion zwischen dem lokalen Maximum und dem lokalen Minimum nicht definiert ist.

In c) haben wir die Extremstellen berechnet:

$f'(x) = 0$ liefert uns die *Extrem**stellen*** $x_{E1} = (-\sqrt{6} - 2)$
$x_{E2} = (+\sqrt{6} - 2)$

mit

$$f''(x_{E1}; x_{E2}) = 0$$

können wir berechnen, ob es sich um ein lokales Minimum oder Maximum handelt.

Es gilt:

$$f'' > 0 \Rightarrow Minimum$$
$$f'' < 0 \Rightarrow Maximum$$

Wir ermitteln nun die dazugehörigen *Funktionswerte.*

$$E_1 = (-\sqrt{6} - 2 \,|\, -2\sqrt{6} - 7)$$

$$E_2 = (+\sqrt{6} - 2 \,|\, 2\sqrt{6} - 7)$$

zuletzt erhalten wir den Wertebereich

$$W: \{y \in R \,|\, -2\sqrt{6} - 7 \geq y \geq 2\sqrt{6} - 7\}$$