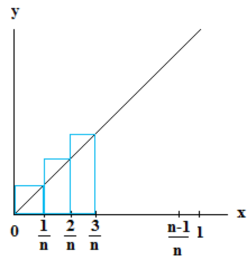
**Bestimmtes Integral**

Gesucht ist die Fläche A unter der Funktion $f(x) = x$ zwischen den Grenzen 0 und 1




Die Fläche kann durch eine Summe von Rechtecken approximiert werden. Dazu wird das Intervall [0; 1] in n gleiche Subintervalle unterteilt:

$$x_0 = 0; \quad x_1 = \frac{1}{n}; \ldots ; \quad x_n = 1$$

Der Abstand zwischen zwei x-Werten ist: $x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n} = \Delta x$ (i = 1,2,......,n)

Die Fläche A kann approximiert werden durch eine Summe von Rechtecken oberhalb der Kurve f(x) und eine Summe von Rechtecken unterhalb der Kurve f(x).

Oberhalb $f(x) = x$ $\qquad A_o = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n}$

Unterhalb $f(x) = x$ $\qquad A_u = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{k-1}{n}$

$$A_u < A < A_o$$

Für n $\to \infty$ geht $\Delta x \to 0$, daher konvergieren die Flächen $A_u$ und $A_o$ gegen A.

$$\lim_{n\to\infty} A_o = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \frac{n+1}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} A_u = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \frac{n-1}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Die Schreibweise für diesen Grenzwert ist das Integralzeichen in der Form:

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

**Bestimmtes Integral**

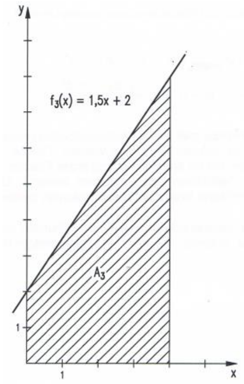
Das bestimmte Integral der Funktion f aus dem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ ist die reelle Zahl

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Beispiele

$\int_0^5 1dx = 5$ $\qquad \int_{-1}^1 x^3 dx = 0$

**Berechnung des bestimmten Integrals**




Beispiel
Fläche von 0 bis x
$A(x) = 2x + \frac{3}{4}x^2$ (Rechteck und Dreieck)

Randfunktion: $f(x) = 1,5x + 2$

Es gilt $A'(x) = f(x)$ → $A(x)$ ist Stammfunktion von $f(x)$.

Fläche von $x = 1$ bis $x = 4$: $A(4) - A(1) = 20 - 2,75 = 17,25$

**Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**

Ist f eine im Intervall $[a;b]$ stetige Funktion mit $f(x) \geq 0$ und F irgendeine Stammfunktion von f, so ist:

$$A = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Beispiel (Grundintegrale)

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\int_{2}^{4} \sqrt{x}dx = \left[\frac{2}{3}x^{1,5}\right]_{2}^{4} = \frac{2}{3}\cdot 4^{1,5} - \frac{2}{3}\cdot 2^{1,5} = 3,45$$

$$\int_{0}^{1} (x-1)^2 dx = \int_{0}^{1} (x^2 - 2x + 1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x\right]_{0}^{1} = \frac{1}{3}$$

Beispiel (Variable bestimmen)

$$\int_{0}^{2k} (k+6)\, dx = 14 \qquad \int_{0}^{1} kx^2 dx = 27 \qquad \int_{0}^{3} e^k x^2 dx = 9$$

Beispiel (Partielle Integration)

$$\int_{1}^{e} x \ln x\, dx \qquad u(x) = \ln x \qquad v'(x) = x \quad \rightarrow u'(x) = \frac{1}{x} \text{ und } v(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$\int_{1}^{e} x \ln x\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_{1}^{e} - \int_{1}^{e} \frac{1}{2}xdx = \frac{1}{2}e^2 - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_{1}^{e} = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = 2,10$$

Beispiel (Substitution)

$$\int_2^6 \sqrt{2x-3}\,dx$$

1. Möglichkeit
Unbestimmtes Integral lösen

$$z = 2x-3 \quad \rightarrow \; z' = \frac{dz}{dx} = 2 \;\rightarrow\; dx = \frac{dz}{2} \;\rightarrow \qquad \frac{1}{2}\int z^{0,5}dz = \frac{1}{3}z^{1,5} = \frac{1}{3}(2x-3)^{1,5}$$

Stammfunktion an den Grenzen bestimmen

$$\left[\frac{1}{3}(2x-3)^{1,5}\right]_2^6 = \frac{26}{3}$$

2. Möglichkeit
Grenzen substituieren

$$z = 2x-3 \quad \rightarrow \; z' = \frac{dz}{dx} = 2 \;\rightarrow\; dx = \frac{dz}{2}$$

Neue Grenzen für z: $x = 2 \rightarrow z = 4-3 = 1$
$x = 6 \rightarrow z = 12-3 = 9$

$$\int_2^6 \sqrt{2x-3}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^9 z^{0,5}dz = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{2}{3}z^{1,5}\right]_1^9 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

**Eigenschaften bestimmter Integrale**

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$ (f muss in a definiert sein)

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$ (falls das Integral existiert)

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$ (f in $[a;b]$ stetig und a ≤ c ≤ b)

Beispiele

$$\int_1^1 e^x dx = \left[e^x\right]_1^1 = e - e = 0 \qquad \int_1^0 x^2 dx = -\int_0^1 x^2 dx = -\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = -\frac{1}{3}$$

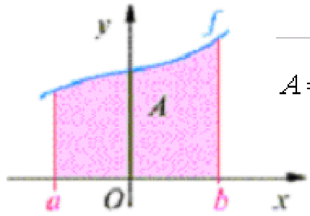
$$\int_0^2 \sqrt{x}dx + \int_2^9 \sqrt{x}dx = \int_0^9 x^{0,5}dx = \left[\frac{2}{3}x^{1,5}\right]_0^9 = 18$$

## Flächenberechnungen

a) Eine Funktion f(x) ist Randkurve

Fall 1) $f(x) \geq 0$ in $[a;\ b]$

$$A=\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$




$$A=\int_a^b f(x)dx$$

Beispiel:
$f(x) = x^2 \quad a = 0; b = 1$

$$A=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$$

Fall 2) $f(x) \leq 0$ in $[a;\ b]$

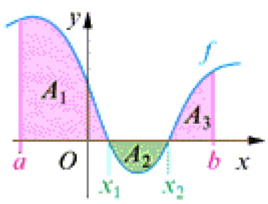
Beispiel: $f(x) = -x^2 \quad a = 0; b = 1$ → Fläche muss auch $1/3$ sein.

$$A=\left|\int_0^1 -x^2dx\right|=\left|\left[-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1\right|=\left|-\frac{1}{3}+0\right|=\frac{1}{3}$$

Allgemein: $A=\left|\int_a^b f(x)dx\right|=\left|[F(x)]_a^b\right|=|F(b)-F(a)|$

Fall 3) Fläche oberhalb und unterhalb der x-Achse (f(x) beliebig in [a; b])

Zuerst müssen die Nullstellen berechnet werden.




$$A=A_1+A_2+A_3$$

$$A=\left|\int_a^{x_1} f(x)dx\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right|+\left|\int_{x_2}^{b} f(x)dx\right|$$

Beispiel 1
Wie groß ist das Flächenstück, das im Intervall $[-2; 2]$ zwischen der Kurve der Funktion $y=x^3-x$ und der x – Achse liegt?

Nullstellen $x=-1;\ \ x=0$ und $x=1$ → 4 Integrale → $A=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=5$

Beispiel 2
Wie groß ist das Flächenstück, das im Intervall $[-1;3]$ zwischen der Kurve der Funktion $y = x^2 - 5x + 4$ und der x – Achse liegt?
Nullstellen: $x = 1$ und $x = 4$ A = 24

Beispiel 3
Wie groß ist das Flächenstück zwischen der Kurve y = $-(0{,}25x^2 - 1)^2$ und der x – Achse mit den Nullstellen als Grenzen
A = 32 / 15

Beispiel 4
Wie groß ist das Flächenstück zwischen der Kurve $y = f(x) = x^2 - 1$ und der x – Achse mit den Nullstellen als Grenzen

$y = f(x) = x^2 - 1$ → Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$

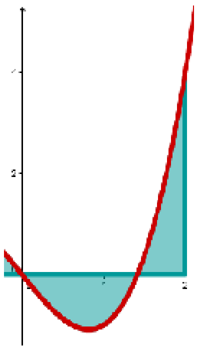
$$\left|\int_{-1}^{1}(x^2 - 1)\,dx\right| = \frac{4}{3}$$

Beispiel 5

Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = x^3 - 2x$ und der x-Achse zwischen 0 und 2

$$f(x) = x\,(x^2 - 2) = x\,(x - \sqrt{2})\,(x + \sqrt{2}) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{NS}_1 = 0,\ \mathrm{NS}_{2/3} = \pm\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
A &= \left|\int_0^{\sqrt{2}} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\sqrt{2}}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_0^{\sqrt{2}} x^3\mathrm{d}x - \int_0^{\sqrt{2}} 2x\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\sqrt{2}}^{2} x^3\mathrm{d}x - \int_{\sqrt{2}}^{2} 2x\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^{\sqrt{2}} - \left[x^2\right]_0^{\sqrt{2}}\right| + \left|\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{\sqrt{2}}^{2} - \left[x^2\right]_{\sqrt{2}}^{2}\right| \\
&= \left|\frac{2}{4} - 0 - (2 - 0)\right| + \left|\frac{64}{4} - \frac{2}{4} - (4 - 2)\right| \\
&= |-1{,}5| + |13{,}5| = 15
\end{aligned}$$



Beispiel 6

Flächen unter und über der x-Achse $f(x)=x^3-3x^2+2x$

Hier müssen auch zuerst die Nullstellen berechnet werden.

$0=x^3-3x^2+2x=x\cdot(x^2-3x+2)$

-> $x_{01}=0$, $0=x^2-3x+2$ $x_{02}=1$, $x_{03}=2$

Es ergeben sich 2 verschiedene Flächen. $A=A_1+A_2$

$A_1=\int_0^1(x^3-3x^2+2x)dx=[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}]_0^1$

$A_1=[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2]_0^1=\frac{1^4}{4}-1^3+1^2-0$

$A_1=\frac{1}{4}-1+1=\frac{1}{4}=0,25$

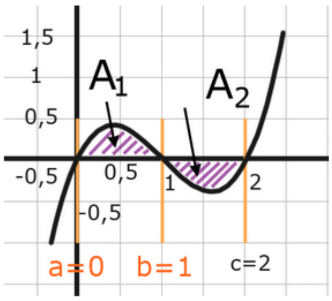
$A_2=|\int_1^2(x^3-3x^2+2x)dx|=|[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2]_1^2|$

$A_2=|\frac{2^4}{4}-2^3+2^2-(\frac{1^4}{4}-1^3+1^2)|$

$A_2=|4-8+4-(\frac{1}{4}-1+1)|$

$A_2=|0-(\frac{1}{4}|=|-0,25|=0,25$

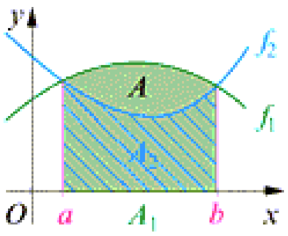
$A=0,25+0,25=0,5$




b) Fläche zwischen zwei Funktionen y = f(x) und y = g(x)

Fall 1: Schnittpunkte sind Grenzen

Zuerst müssen die Schnittpunkte berechnet werden.




$$A=A_1-A_2$$
$$A=\left|\int_a^b[f_1(x)-f_2(x)]dx\right|$$

Beispiel 1
Wie groß ist der Flächeninhalt, der von den Kurven der Funktionen $y=-x^2+2$ und $y=x^2-6$ zwischen den gemeinsamen Schnittpunkten eingeschlossen wird?
Schnittpunkte bei $x=-2$ und $x=2$

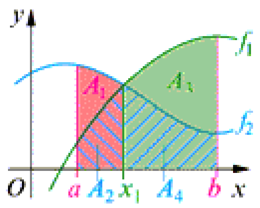
$$A=\left|\int_{-2}^{2}(2x^2-8)dx\right|=\left|\frac{2}{3}x^3-8x\right|_{-2}^{2}=\left|\left(\frac{16}{3}-16\right)-\left(-\frac{16}{3}+16\right)\right|=\frac{64}{3}$$

Beispiel 2
Wie groß ist der Flächeninhalt, der von den Kurven der Funktionen $y=x^2-4x+1$ und $y=7-x^2$ zwischen den gemeinsamen Schnittpunkten eingeschlossen wird?
Schnittpunkte bei $x=-1$ und $x=3$

$$A=\left|\int_{-1}^{3}(2x^2-4x-6)dx\right|=\left|\frac{2}{3}x^3-2x^2-6x\right|_{-1}^{3}=\left|-\frac{64}{3}\right|=\frac{64}{3}$$

Fall 2: Vorgegebene Grenzen

Zuerst müssen die Schnittpunkte berechnet werden.




$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$

$$A = \int_a^{x_1} [f_2(x) - f_1(x)]dx + \int_{x_1}^{b} [f_1(x) - f_2(x)]dx$$

Beispiel 1

$y = f(x) = x^2 - 1$ $\quad$ $y = g(x) = 3$ Fläche für $0 \leq x \leq 4$

→ Schnittpunkte $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$

$$\left|\int_0^2 3 - (x^2 - 1)dx\right| + \left|\int_2^4 3 - (x^2 - 1)dx\right| = \frac{16}{3} + \frac{32}{3} = 16$$

Beispiel 2

Es ist die Fläche zwischen den Kurven y = -x² + 2x + 2 und y = x² - 2 in den Grenzen von 0 bis 3 zu berechnen. →

Lösung: Schnittpunkte bei $x = -1$ und $x = 2$ $\qquad$ A = 31 / 3

Beispiel 3

Gegeben sind die Funktionen:

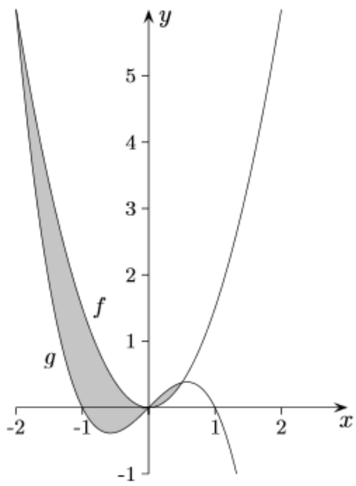
$f(x) = \frac{3}{2}x^2$ und $g(x) = x - x^3$

Berechne den Inhalt der von den Graphen eingeschlossenen Flächen.

$$A_1 = \int_{-2}^{0} (f(x) - g(x))\,dx = 2$$

$$A_2 = \int_{0}^{\frac{1}{2}} (g(x) - f(x))\,dx = \frac{3}{64}$$

Gesamtfläche 2,047




Beispiel 4

Fläche zwischen den Graphen der beiden Funktionen $f$ und $g$ mit $f(x) = -2x^2 + 1$ und $g(x) = x^4 - 2x^2$ $\quad$ $a = -1$ und $b = 1$.

$$A = \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (-2x^2 + 1 - (x^4 - 2^2))\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (-x^4 + 1)\mathrm{d}x = [-\frac{1}{5}x^5 + x]_{-1}^{1} =$$

$$-\frac{1}{5} + 1 - (-\frac{1}{5} \cdot (-1)^5 - 1) = \frac{8}{5}$$

# Flächen mit Parametern

Beispiel 1

Gegeben ist die Funktion $y = f_a(x) = x\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$ mit dem Parameter $a > 0$

a) Berechnen Sie die Größe der Fläche A, welche der Graph der Funktion $f_1(x)$, also für a=1, mit der x-Achse einschließt.

b) Für welchen Wert des Parameters a beträgt die von $f_a(x)$ und der x-Achse eingeschlossene Fläche 6 Flächeneinheiten.

Nullstellen: $x = 0; \quad x = \pm 1$

$$z = 1 - x^2 \rightarrow z' = \frac{dz}{dx} = -2x \quad \rightarrow dx = \frac{dz}{-2x} \rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}\int z^{0,5}dz = -\frac{1}{3}z^{1,5} = -\frac{1}{3}\left(1 - x^2\right)^{1,5} + c$$

Stammfunktion an den Grenzen bestimmen

$$A = \left|\left[-\frac{1}{3}\left(1 - x^2\right)^{1,5}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[-\frac{1}{3}(1 - x^2)\right]_{0}^{1}\right| = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Nullstellen: $x = 0; \quad x = \pm a$

$$z = 1 - \frac{x^2}{a^2} \rightarrow z' = \frac{dz}{dx} = -\frac{2x}{a^2} \quad \rightarrow dx = -\frac{a^2 dz}{2x} \rightarrow$$

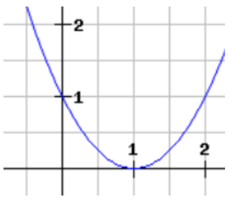
$$-\frac{a^2}{2}\int z^{0,5}dz = -\frac{a^2}{3}z^{1,5} = -\frac{a^2}{3}\left(1 - \frac{x}{a^2}^2\right)^{1,5} + c$$

Stammfunktion an den Grenzen bestimmen

$$A = \left|\left[-\frac{a^2}{3}\left(1 - \frac{x}{a^2}^2\right)^{1,5}\right]_{-a}^{0}\right| + \left|\left[-\frac{a^2}{3}(1 - \frac{x^2}{a^2})\right]_{0}^{a}\right| = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{3} = \frac{2}{3}a^2 = 6 \rightarrow a = 3$$

Beispiel 2

Welche Parabel mit der Gleichung der Form $y = f(x) = (x - c)^2, \quad c > 0$ begrenzt mit den Koordinatenachsen eine Fläche von 9 Flächeneinheiten?

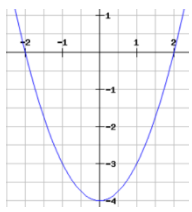



Grenzen: $x = 0$ und Nullstelle $x = c$

$$A = \int_0^c (x - c)^2 dx = \left[\frac{1}{3}(x - c)^3\right]_0^c = 0 + \frac{1}{3}c^3 = 9 \rightarrow c = 3$$

Beispiel 3

Bestimmen Sie die Parabel $y = f(x) = ax^2 - 4a, \quad a > 0$, welche mit der x-Achse eine Fläche von 3 Flächeneinheiten einschließt.



Nullstellen:; $x = \pm 2$

$$A = \left|\int_{-2}^{2} ax^2 - 4adx\right| = a\left|\left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{-2}^{2}\right| = a\left|-\frac{16}{3} + \frac{8}{3} - 8\right| = \frac{32}{3}a = 3 \quad \rightarrow \quad a = \frac{9}{32}$$

Beispiel 4

Bestimme $n \in N$ so, dass die Funktion $f(x) = x^n$ die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten $O(0;\, 0);\, A(1;\, 0)$ und $B(1;\, 1)$ halbiert.

Fläche Dreieck: $A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$

Fläche: $\int_{0}^{1} x^n dx = \frac{1}{n+1} = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad n = 3$