

Lineare Gleichungssysteme haben grundsätzlich folgende Lösungsfälle

Es gibt folgende drei Lösungsfälle:



Keine Lösung

$$\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A|\vec{b})$$

Es gibt keine Lösung, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix A nicht dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|\vec{b})$ entspricht.



Eindeutige Lösung

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|\vec{b}) = n$$

Es gibt eine eindeutige Lösung, wenn der Rang der (erweiterten) Koeffizientenmatrix der Anzahl der Variablen n entspricht.



Unendlich viele Lösungen

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|\vec{b}) < n$$

Es gibt unendlich viele Lösungen, wenn der Rang der (erweiterten) Koeffizientenmatrix kleiner als die Anzahl der Variablen n ist.

Beispiele

Beispiel 1

Gegeben sei ein LGS durch

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

Triff eine Aussage über die Lösbarkeit des LGS.

1 Rang der (erweiterten) Koeffizientenmatrix bestimmen

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 3 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

$$\Rightarrow \text{rang}(A|\vec{b}) = 3$$

Anmerkung: Das LGS hat $n = 3$ Variablen.

2 Ergebnis interpretieren

$$\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A|\vec{b})$$

$\Rightarrow$ Es gibt keine Lösung.

Merke:

Falls der Rang der Matrix $A \neq$ dem Rang der erweiterten Matrix $A|\vec{b}$ ist gibt es keine Lösung!

Frage: warum ist das so?

Beispiel 2

Gegeben sei ein LGS durch

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \end{array} \right)$$

Triff eine Aussage über die Lösbarkeit des LGS.

1 Rang der (erweiterten) Koeffizientenmatrix bestimmen

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 9 & 3 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \text{rang}(A) = 3$$

$$\Rightarrow \text{rang}(A|\vec{b}) = 3$$

Anmerkung: Das LGS hat $n = 3$ Variablen.

2 Ergebnis interpretieren

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|\vec{b}) = n$$

$\Rightarrow$ Es gibt eine eindeutige Lösung.

Merke:

Falls der Rang der Matrix A = dem Rang der erweiterten Matrix $A|\vec{b}$ und = der Anzahl der Unbekannten „ n “ ist, gibt es eine eindeutige Lösung!

Frage: warum ist das so?

Beispiel 3

Gegeben sei ein LGS durch

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Triff eine Aussage über die Lösbarkeit des LGS.

1 Rang der (erweiterten) Koeffizientenmatrix bestimmen

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

$$\Rightarrow \text{rang}(A|\vec{b}) = 2$$

Anmerkung: Das LGS hat $n = 3$ Variablen.

2 Ergebnis interpretieren

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|\vec{b}) < n$$

$\Rightarrow$ Es gibt unendlich viele Lösungen.

Merke:

Falls der Rang der Matrix A = dem Rang der erweiterten Matrix $A|\vec{b}$ aber die Anzahl der Unbekannten „ n “ kleiner als Rang A bzw $A|\vec{b}$ ist, gibt es eine unendlich viele Lösungen!

Frage: warum ist das so?

und: wie können wir unendlich viele Lösungen definieren?