

Arbeitsblatt Lineare Gleichungssysteme

1. Gegeben ist das Gleichungssystem:
- $$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 3 \\x_2 - 2x_3 &= 5 \\2x_2 - 6x_3 &= 1\end{aligned}$$
- Schreiben Sie das LGS als Matrizengleichung
 - Stellen Sie die Gleichung nach dem Spaltenvektor $\mathbf{x}$ um.
 - Berechnen Sie die inverse Matrix und anschl. den Vektor $\mathbf{x}$.
2. Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren
- $$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\9x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3\end{aligned}$$
3. Für welche Zahlen $a \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar? Lösen Sie das Gleichungssystem für den Fall $a = 1$.
- $$\begin{aligned}3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\(2 + 2a)x_1 + 4x_3 &= 0 \\x_1 + (2 - a)x_2 &= 1\end{aligned}$$
4. Berechne den Rang $r(A)$ und $r(A|b)$. Welche Aussage kann man über die Lösbarkeit von $Ax = b$ machen?
- $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
 - $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -6 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & a \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{R}$
5. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$:
- $$\begin{aligned}-x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ax_1 + 6x_2 + x_3 &= 5\end{aligned} \quad a \in \mathbb{R}$$
- Für welchen Wert von a hat das Gleichungssystem keine eindeutige Lösung?
 - Berechnen Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems für den Fall $a = 0$.
 - Geben Sie zu dieser allgemeinen Lösung zwei spezielle Lösungen an, bei denen alle x_i im Intervall $[0; 2]$ liegen.
6. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$
- $$\begin{aligned}x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\-3x_1 + x_2 - 3x_3 &= -4 \\4x_1 + (a+3)x_3 &= 4a\end{aligned}$$
- Für welche reellen Zahlen a hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung? Berechnen Sie die Lösung des Gleichungssystems für $a=2$
 - Prüfen Sie die Lösbarkeit für den Fall $a=1$ und berechnen Sie gegebenenfalls die allgemeine Lösung.
 - Finden Sie unter den Lösungen von b) diejenige spezielle Lösung, für die $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ minimal ist.