

Rechenregeln Matrizen

Rechenregeln für Matrizen

Multiplikation einer Matrix mit der Einheitsmatrix

Es gilt

$$\mathbf{A}\mathbf{E} = \mathbf{E}\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

also die Multiplikation einer Matrix $\mathbf{A}$ mit der Einheitsmatrix ergibt wiederum $\mathbf{A}$.

Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

dann ist die Einheitsmatrix der gleichen Dimension

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{E} &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2*1 + 5*0 & 2*0 + 5*1 \\ 1*1 + 7*0 & 1*0 + 7*1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1*2 + 0*1 & 1*5 + 0*7 \\ 0*2 + 1*1 & 0*5 + 1*7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Rechenregeln Matrizen

Multiplikation einer Matrix mit der Nullmatrix

Das Produkt einer quadratischen Matrix mit der Nullmatrix ergibt die Nullmatrix:

$$\mathbf{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}\mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Falls wiederum

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

dann ist

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{0} &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2*0 + 5*0 & 2*0 + 5*0 \\ 1*0 + 7*0 & 1*0 + 7*0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathbf{0}\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0*2 + 0*1 & 0*5 + 0*7 \\ 0*2 + 0*1 & 0*5 + 0*7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Transponieren einer Summe bzw. eines Produkts zweier Matrizen

Weiters gelten folgende Regeln:

1. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
2. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$
3. $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

Rechenregeln Matrizen

Wenn

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

dann ist

1.

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right)^T \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

also

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T.$$

2.

$$\begin{aligned} (\mathbf{AB})^T &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right)^T \\ &= \begin{pmatrix} 20 & 7 \\ 28 & 17 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 20 & 28 \\ 7 & 17 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Rechenregeln Matrizen

und

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T &= \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 20 & 28 \\ 7 & 17 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

also

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T.$$

3. Schließlich wollen wir ein Beispiel für Regel 3 betrachten:

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}^T)^T &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}^T \right)^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \mathbf{A}.\end{aligned}$$

Die Inverse eines Produktes von zwei Matrizen

Es gilt

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}.$$

Auch hier ein Beispiel (mit den gleichen Matrizen wie vorher):

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})^{-1} &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 20 & 7 \\ 28 & 17 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{20 * 17 - 28 * 7} \begin{pmatrix} 17 & -7 \\ -28 & 20 \end{pmatrix} = \frac{1}{144} \begin{pmatrix} 17 & -7 \\ -28 & 20 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{17}{144} & \frac{-7}{144} \\ \frac{-28}{144} & \frac{20}{144} \end{pmatrix} \\ \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}^{-1}\end{aligned}$$

Rechenregeln Matrizen

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{0 * 3 - 4 * (-4)} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2 * 7 - 1 * 5} \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16 * 9} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{144} \begin{pmatrix} 17 & -7 \\ -28 & 20 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

also

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}.$$

Potenzieren von Matrizen

$$\mathbf{A}^p = \underbrace{\mathbf{A} \mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_{p\text{-mal}}$$

- $\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}$
- $\mathbf{A}^{-p} = (\mathbf{A}^{-1})^p$
- $\mathbf{A}^{p+q} = \mathbf{A}^p \mathbf{A}^q$