

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Systems $Ax = b$ mit $b = (2, 4, -2)^T$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (Ökonomieaufgabe)

Ein kleines exklusives Unternehmen der Bekleidungsindustrie stellt Unterhosen, Unterhemden sowie Hosen und Röcke aus reiner Baumwolle her. Für die gesamte Produktion stehen im Monat 1.525 m^2 Baumwollstoff zur Verfügung. Um einen netten Gewinn zu sichern, sollen die Gesamtkosten nur 40.500 Geldeinheiten (GE) pro Monat betragen. Der Umsatz im Bereich "Unterwäsche" ist auf 31.500 GE/Monat geplant, und bei der "Oberbekleidung" sollen 52.000 GE/Monat umgesetzt werden.

	Unterhose	Unterhemd	Hose	Rock
Stoffverbrauch ($\text{m}^2/\text{Stück}$)	0,25	1	2	3
Herstellungskosten (GE/Stück)	15	20	60	80
Verkaufspreis (GE/Stück)	25	40	110	200

Wie viele Unterhosen, Unterhemden, Hosen und Röcke müssen hergestellt werden, wenn alle obengenannten Bedingungen erfüllt werden sollen? Stellen Sie dazu ein Gleichungssystem auf und lösen Sie dieses Problem mit dem Gauß'schen Verfahren.

Quelle: IU Frankfurt am Main / Duales Studium BWL

Lösungen:**Aufgabe 1**

Bestimmung der Lösungsmenge:

Aufstellung der erweiterten Koeffizientenmatrix und Auflösung mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens:

$$(A \mid b)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{array} \right) -I$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & -4 \end{array} \right) +\frac{4}{3} \cdot II$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{array} \right)$$

Somit ergibt sich folgender Lösungsvektor:

$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

$$Ax = b$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,25 & 1 & 2 & 3 \\ 15 & 20 & 60 & 80 \\ 25 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 110 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.525 \\ 40.500 \\ 31.500 \\ 52.000 \end{pmatrix}$$

Aufstellung der erweiterten Koeffizientenmatrix und Auflösung mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens:

$$(A | b)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0,25 & 1 & 2 & 3 & 1.525 \\ 15 & 20 & 60 & 80 & 40.500 \\ 25 & 40 & 0 & 0 & 31.500 \\ 0 & 0 & 110 & 200 & 52.000 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ -60 \cdot I \\ -100 \cdot I \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0,25 & 1 & 2 & 3 & 1.525 \\ 0 & -40 & -60 & -100 & -51.000 \\ 0 & -60 & -200 & -300 & -121.000 \\ 0 & 0 & 110 & 200 & 52.000 \end{array} \right) -\frac{3}{2} \cdot II$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0,25 & 1 & 2 & 3 & 1.525 \\ 0 & -40 & -60 & -100 & -51.000 \\ 0 & 0 & -110 & -150 & -44.500 \\ 0 & 0 & 110 & 200 & 52.000 \end{array} \right) +III$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0,25 & 1 & 2 & 3 & 1.525 \\ 0 & -40 & -60 & -100 & -51.000 \\ 0 & 0 & -110 & -150 & -44.500 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 7.500 \end{array} \right)$$

Somit ergibt sich folgende Lösungsmenge:

$$x = \begin{pmatrix} 300 \\ 600 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix}$$

Und es müssen 300 Unterhosen, 600 Unterhemden, 200 Hosen und 150 Röcke hergestellt werden.