

Vorlesungsskript: Produktionsfaktoren und Isoquanten

1. Produktionsfaktoren – Allgemeine Einführung und Bedeutung in der BWL

1.1 Definition Produktionsfaktoren

Produktionsfaktoren sind alle **Einsatzgüter**, die notwendig sind, um Güter oder Dienstleistungen herzustellen. Sie werden im Produktionsprozess kombiniert und transformiert, um einen Output zu erzeugen.

Was bedeutet im Kontext: transformiert?

Klassische Produktionsfaktoren (nach Gutenberg, stark verbreitet in der BWL):

- **Arbeit** (menschliche Arbeitsleistung)
- **Betriebsmittel** (Maschinen, Anlagen, Werkzeuge)
- **Werkstoffe** (Roh-, Hilfs- und Betriebsstoffe)
- **Disposition** (planende und leitende Tätigkeit, Management)

Elementarfaktoren (direkt am Produktionsprozess beteiligt):

Werkstoffe: Gehen in das Produkt ein oder werden verbraucht.

Rohstoffe: Hauptbestandteil (z.B. Holz, Stahl).

Hilfsstoffe: Nebenbestandteil (z.B. Schrauben, Leim).

Betriebsstoffe: Werden verbraucht, ohne ins Produkt einzugehen (z.B. Strom, Schmiermittel).

Betriebsmittel: Nicht direkt verbrauchte Einsatzstoffe (z.B. Maschinen, Gebäude, Werkzeuge).

Arbeit: Menschliche Arbeitsleistung, die direkt am Produkt erbracht wird.

Dispositiver Faktor(leitend/kombinierend):

Leitung, Planung, Organisation und Kontrolle.

Er stellt das optimale Zusammenwirken der Elementarfaktoren sicher.

Erweiterte Sichtweisen berücksichtigen zusätzlich:

- Wissen und Technologie
- Kapital
- Information

1.2 Bedeutung der Produktionsfaktoren in der BWL

In der Betriebswirtschaftslehre stehen Produktionsfaktoren im Zentrum vieler Fragestellungen:

- **Kostenrechnung:**
Jeder Produktionsfaktor verursacht Kosten (z. B. Löhne, Abschreibungen, Materialkosten).
- **Produktionsplanung:**
Wie viele Arbeitsstunden und Maschinenkapazitäten werden benötigt?
- **Effizienz und Produktivität:**
Wie kann mit gegebenen Produktionsfaktoren ein maximaler Output erzielt werden?
- **Make-or-Buy-Entscheidungen:**
Soll ein Produktionsfaktor intern eingesetzt oder extern beschafft werden?

Kernfrage der BWL: 

Wie kombiniere ich Produktionsfaktoren so, dass ein bestimmter Output möglichst kostengünstig entsteht?

2. Isoquanten – Definition, Bedeutung und Praxisbeispiele

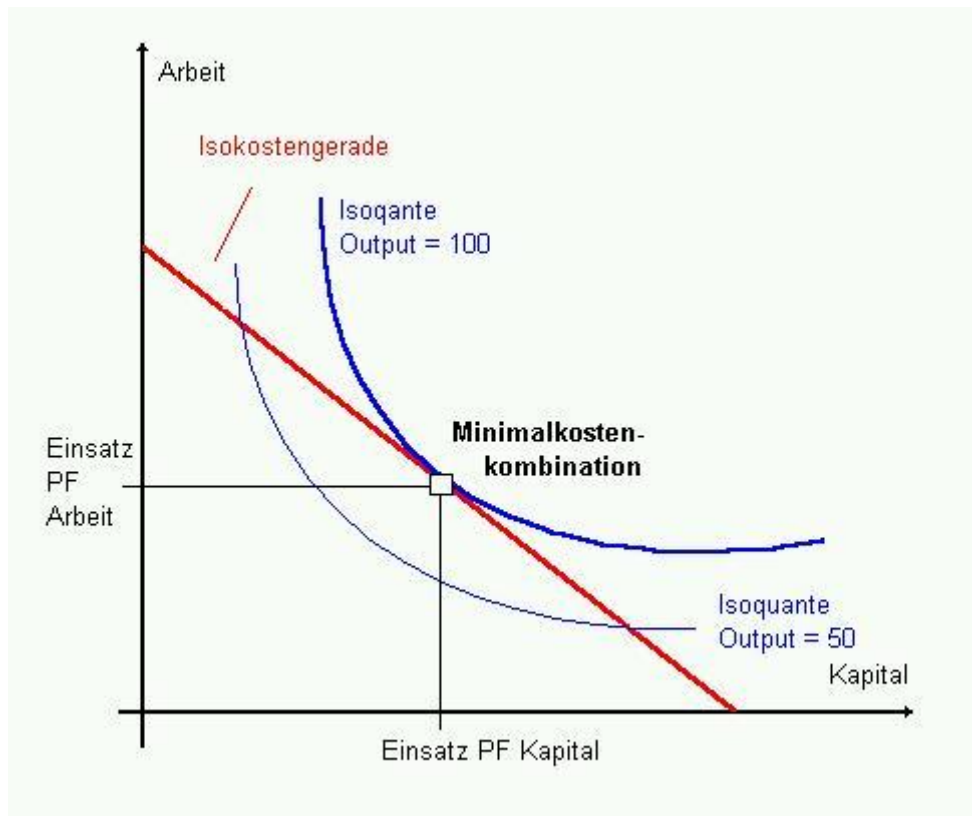
2.1 Definition Isoquante

Eine **Isoquante** ist eine Kurve, die **alle Kombinationen von Produktionsfaktoren** darstellt, mit denen **dieselbe Outputmenge** produziert werden kann.

Vergleich:

- Isoquante in der Produktion $\approx$ Indifferenzkurve im Konsum

Frage: VWL Thema?



Interpretation der Grafik:

Die Grafik zeigt das **Kostenminimum in der Produktion** – also die Kombination von Arbeit und Kapital, mit der ein bestimmter Output zu minimalen Kosten produziert wird.

Achsen der Grafik

- **Vertikale Achse:** Einsatz des Produktionsfaktors **Arbeit (L)**
- **Horizontale Achse:** Einsatz des Produktionsfaktors **Kapital (K)**

Jeder Punkt im Diagramm stellt eine **bestimmte Faktorkombination (L, K)** dar.

Die Isoquanten (blaue Kurven)

Es sind zwei Isoquanten eingezeichnet:

- **Isoquante Output = 50**
- **Isoquante Output = 100**

Bedeutung einer Isoquante

Eine Isoquante zeigt **alle Kombinationen von Arbeit und Kapital**, mit denen **die gleiche Outputmenge** produziert wird.

Beispiel:

- Viel Arbeit + wenig Kapital
- Wenig Arbeit + viel Kapital

→ Beide Kombinationen erzeugen denselben Output.

Eigenschaften der Isoquanten in der Grafik:

- Sie sind **fallend** → mehr Arbeit erlaubt weniger Kapital.
- Sie sind **konvex** → Substitution wird schwieriger, je mehr man einen Faktor ersetzt.
- Die Isoquante für Output = 100 liegt weiter vom Ursprung entfernt als die für Output = 50 → höherer Output benötigt mehr Faktoreinsatz.

Die Isokosten-Gerade (rote Linie)

Die rote Linie ist die **Isokosten-Gerade**.

Bedeutung:

Sie zeigt **alle Faktorkombinationen, die gleich viel kosten**.

Die Gesamtkosten nennen wir $Y = \text{konstanter „output“}$

Damit erhalten wir:

$$Y = \omega \cdot L + \alpha \cdot K$$

ω sei der *Lohnsatz* (Preis pro Einheit Arbeit)

γ sei der *Kapitalkostensatz* (Preis pro Einheit Kapital)

Stellen wir diese Gesamtkostenfunktion nach K um, erhalten wir

$$K = -\frac{\omega}{\alpha} \cdot L + \frac{Y}{\alpha}$$

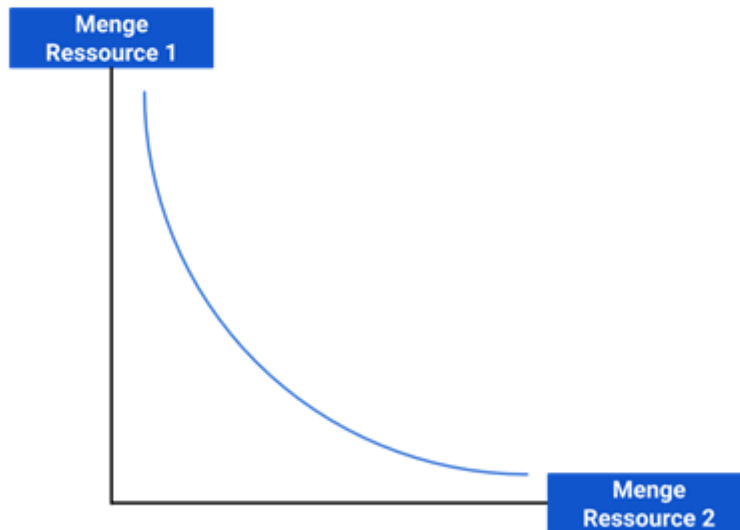
Die Isokosten-Gerade ist also eine lineare Funktion mit negativer Steigung $\frac{\omega}{\alpha}$.

Da der Output Y konstant bleiben soll, ist der Quotient $\frac{Y}{\alpha}$ eine Konstante

Die Steigung zeigt das **Preisverhältnis der Produktionsfaktoren**. 👍👍👍

Isoquante

Grafische Darstellung



2.2 Eigenschaften von Isoquanten

- **Fallender Verlauf:**
Mehr Einsatz eines Faktors erlaubt weniger Einsatz eines anderen.
- **Konvex zum Ursprung:**
Aufgrund abnehmender Grenzrate der technischen Substitution (GRTS).
- **Schneiden sich nicht:**
Zwei unterschiedliche Outputniveaus können nicht identisch sein.
- **Weiter vom Ursprung entfernt = höherer Output**

2.3 Bedeutung der Isoquanten in der BWL

Isoquanten helfen Unternehmen bei:

- der **Analyse von Substitutionsmöglichkeiten** zwischen Produktionsfaktoren
- der **kostenminimalen Faktorwahl** (in Verbindung mit Isokostenlinien)
- strategischen Entscheidungen wie **Automatisierung** oder **Personalaufbau**

2.4 Praxisbeispiel Isoquante

Beispiel: Möbelhersteller

Ein Unternehmen produziert Tische mit:

- Arbeitsstunden (Arbeit)
- Maschinenstunden (Kapital)

Mögliche Kombinationen für 100 Tische:

- 10 Arbeitskräfte + 2 Maschinen
- 6 Arbeitskräfte + 4 Maschinen
- 3 Arbeitskräfte + 6 Maschinen

Alle Kombinationen liegen auf **derselben Isoquante**, da der Output identisch ist.

3. Perfekte Substitute – Definition und Praxisbeispiel

3.1 Definition perfekte Substitute

Perfekte Substitute liegen vor, wenn zwei Produktionsfaktoren **vollständig gegeneinander austauschbar** sind, ohne dass sich der Output verändert.

- ◆ Isoquanten sind in diesem Fall **linear (gerade Linien)**.
- ◆ Die Grenzrate der technischen Substitution ist **konstant**.

Beispiel

Der Rasen eines großen Fußballstadions muss an einem Tag gemäht werden (Output hier: 8.000 qm gemähte Fläche). Zur Verfügung stehen

- Arbeiter mit einer Sichel, die 100 qm je Stunde mähen und je geleistete Arbeitsstunde bezahlt werden (Produktionsfaktor Arbeit) und
- Rasenmähroboter, die 200 qm je Stunde schaffen und zu einer Mietgebühr je Stunde ausgeliehen werden können (Produktionsfaktor Kapital).

Der Output von 8.000 gemähten qm kann durch mehrere Kombinationen von Produktionsfaktoren erreicht werden, **zum Beispiel:**

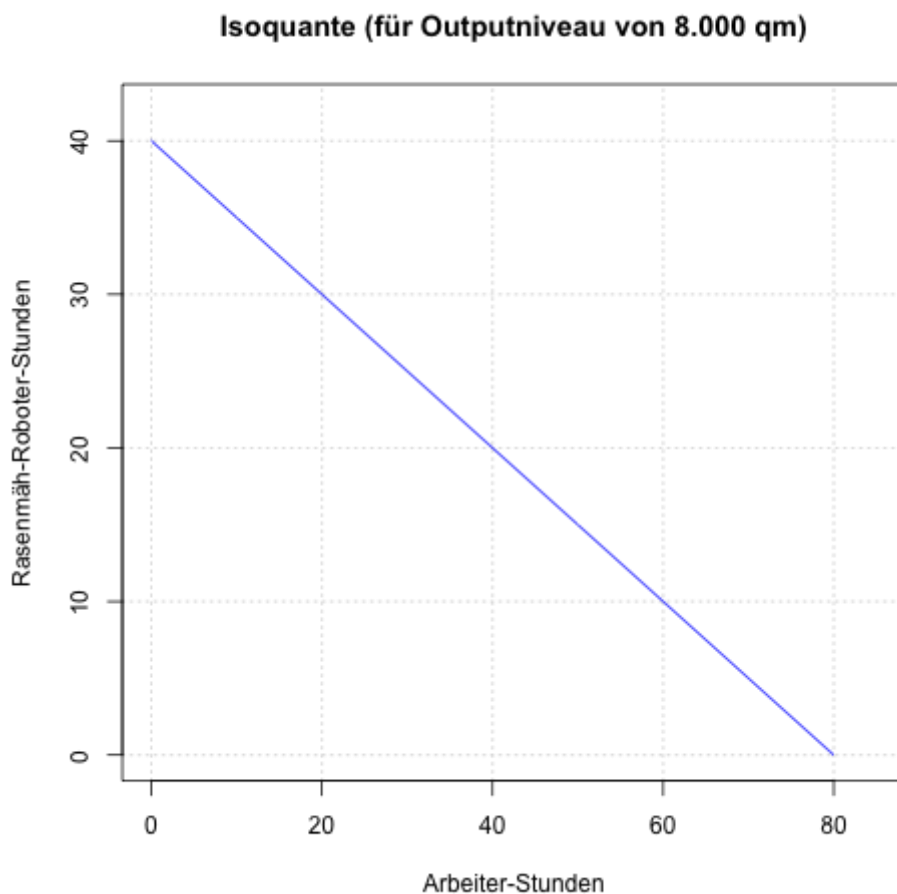
- 10 Arbeiter mähen jeweils 8 Arbeitsstunden ($80 \text{ Std.} \times 100 \text{ qm/Std.} = 8.000 \text{ qm}$)
- 8 Arbeiter mähen 8 Stunden ($64 \text{ Std.} \times 100 \text{ qm/Std.} = 6.400 \text{ qm}$) und 1 Rasenmähroboter mäht 8 Std. ($8 \text{ Std.} \times 200 \text{ qm/Std.} = 1.600 \text{ qm}$)
- u s w
- 5 Rasenmähroboter mähen jeweils 8 Std. ($40 \text{ Std.} \times 200 \text{ qm/Std.} = 8.000 \text{ qm}$).

Isoquanten können für verschiedene **Outputniveaus** gebildet und dargestellt werden (zum Beispiel für 8.000 qm wie im Beispiel, für 9.000 qm und für 10.000 qm), man erhält dann eine sogenannte **Isoquantenschar**.

Isoquante zeichnen

Der eine Produktionsfaktor wird auf der x-Achse, der zweite Produktionsfaktor auf der y-Achse abgetragen und die Isoquante ist dann die Kurve, die die eingezeichneten Punkte (Faktorkombinationen) verbindet.

Die Isoquante für den Output von 8.000 qm sieht so aus:



Es handelt sich hierbei um eine **lineare Produktionsfunktion** der Form:

$$Y = 100 \cdot A + 200 \cdot R$$

Dabei ist Y der Output (die gemähte Rasenfläche), A ist die Anzahl der Arbeitsstunden und R die Anzahl der Roboterstunden.

Arbeiter- und Roboterstunden stellen hier perfekte Substitute dar, die gegeneinander in einem festen Verhältnis ausgetauscht werden können.

Isoquante berechnen (hier: R)

Um die Isoquante für einen Output von 8.000 qm zu zeichnen, kann man die Funktion nach dem zweiten Faktor R auflösen:

$$8.000 = 100 A + 200 R$$

$$R = -0,5 A + 40$$

Dabei ist 40 der y-Achsenabschnitt und -0,5 ist die (negative) Steigung der Geraden

Die Grenzrate der technischen Substitution ist konstant und entspricht der Steigung der Geraden. 👍

Definition: Grenzrate GRTS

Die Grenzrate der technischen Substitution gibt an, wie viele Einheiten eines Produktionsfaktors (z.B. ω) aufgegeben werden können, wenn eine zusätzliche Einheit (z.B. α) eingesetzt wird, ohne dass sich die Produktionsmenge (Output) ändert.

Formel:

$$GRTS = \frac{\Delta A}{\Delta K} \text{ mit } A \text{ für Arbeit und } K \text{ für Kapital oder } GRTS = Y'(K) \text{ (erste Ableitung)}$$

3.2 Praxisbeispiel perfekte Substitute

Beispiel: Datenerfassung im Unternehmen

Ein Unternehmen kann Daten erfassen von:

- **Mitarbeiter A**
- **Mitarbeiter B**

Beide arbeiten:

- gleich schnell
- gleich fehlerfrei
- zum gleichen Qualitätsstandard

- Eine Arbeitsstunde von A ersetzt exakt eine Arbeitsstunde von B.
- Die Produktionsfaktoren sind **perfekte Substitute**.

Weitere Beispiele:

- Zwei identische Maschinen desselben Typs
- Standardisierte Cloud-Server mit gleicher Leistung
- Gleich qualifizierte Zeitarbeitskräfte

4. Zusammenfassung

- Produktionsfaktoren sind zentrale Inputgrößen der betrieblichen Leistungserstellung.
- Isoquanten zeigen technisch effiziente Faktorkombinationen für einen bestimmten Output.
- Perfekte Substitute sind ein Spezialfall mit linear verlaufenden Isoquanten.
- In der Praxis helfen diese Konzepte bei **Kostenminimierung, Produktionsplanung** und **strategischen Investitionsentscheidungen**. 👍👍

Schauen wir uns abschließend noch einmal die Besonderheit der perfekten Substitute an vs allgemein Cobb-Douglas

Perfekte Substitute

Produktionsfunktion:

$$Q = L + K$$

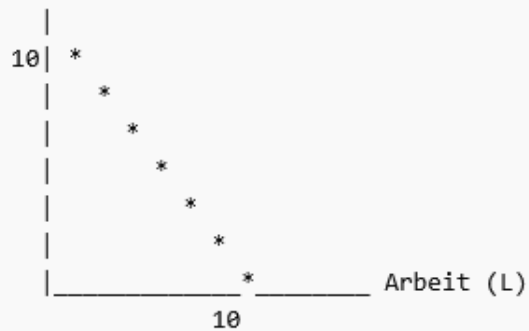
Isoquante für $Q = 10$:

$$K = 10 - L$$

→ Gerade Linie

Code

Kapital (K)



Eigenschaften:

- Linear
- Konstante Steigung
- GRTS konstant (=1)
- Vollständige Substitution

Quelle: Perplexity

Cobb-Douglas

Produktionsfunktion:

$$Q = L^{0,5} K^{0,5}$$

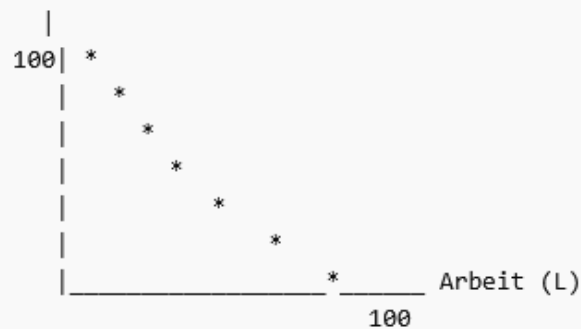
Isoquante für $Q = 10$:

$$K = 100/L$$

→ Konvexe Kurve

Code

Kapital (K)



Eigenschaften:

- Konvex zum Ursprung
- Abnehmende GRTS
- Beide Faktoren notwendig
- Substitution wird zunehmend schwieriger

Quelle: Perplexity



Wie berechnen wir die Minimalkostenkombination? (jetzt wird es ein wenig schwierig)

Es sei folgende Bedingung gegeben:

Rechenbeispiel (Cobb-Douglas)

Gegeben:

$$Q = L^{0,5} K^{0,5}$$

Gewünschter Output:

$$Q = 20$$

Faktorpreise:

- $w = 10$
- $r = 5$

Schritt 1: Grenzprodukte bestimmen

$$GP_L = 0,5 L^{-0,5} K^{0,5}$$

$$GP_K = 0,5 L^{0,5} K^{-0,5}$$

Schritt 2: GRTS berechnen

$$GRTS = \frac{GP_L}{GP_K} = \frac{K}{L}$$

Tangentialbedingung:

$$\frac{K}{L} = \frac{w}{r}$$

Einsetzen:

$$\frac{K}{L} = \frac{10}{5} = 2$$

$$K = 2L$$

☹️ wo kommen denn die Grenzprodukte her???

Grenzprodukte berechnen

Produktionsfunktion:

$$Q = L^{0,5} \cdot K^{0,5}$$

Grenzprodukt der Arbeit:

$$GP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = 0,5 \cdot L^{-0,5} \cdot K^{0,5}$$

Grenzprodukt des Kapitals:

$$GP_K = 0,5 \cdot L^{0,5} \cdot K^{-0,5}$$

Hinweis: der Term $\frac{\partial Q}{\partial L}$ bedeutet die partielle Ableitung nach beiden Parametern.

Wir werden das (kurz) im Mathematikunterricht ansprechen, wenn wir die Differentialrechnung behandeln.

Schritt 3: In Produktionsfunktion einsetzen

$$20 = \sqrt{L \cdot K}$$

Einsetzen $K = 2L$:

$$20 = \sqrt{2L^2}$$

$$20 = \sqrt{2} \cdot L$$

$$L = \frac{20}{\sqrt{2}} \approx 14,14$$

$$K = 2L \approx 28,28$$

4. Minimalkosten berechnen

$$C = 10L + 5K$$

$$C = 10(14,14) + 5(28,28)$$

$$C = 141,4 + 141,4$$

$$C = 282,8$$

Ergebnis

Minimalkostenkombination:

$$L^* \approx 14,14$$

$$K^* \approx 28,28$$

Minimale Kosten:

$$C^* \approx 282,8$$

Merksatz:**Grundidee der Minimalkostenkombination**

Ein Unternehmen will:

- einen **gegebenen Output** $\bar{Q}$
- mit **minimalen Kosten**

produzieren.

Kostenfunktion:

$$C = wL + rK$$

- w = Lohnsatz (Preis der Arbeit)
- r = Kapitalkostensatz
- L = Arbeit
- K = Kapital

Die zentrale Bedingung (Tangentialbedingung)

Im Optimum gilt:

$$\frac{\text{Grenzprodukt}_L}{\text{Grenzprodukt}_K} = \frac{w}{r}$$

Oder:

$$GRTS = \frac{w}{r}$$