## Der Rentenendwert mit nachschüssiger Zahlung

Für den Endwert regelmäßiger nachschüssiger Zahlungen gilt:

$$K_n = \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Beispiel 1: Herr Maier zahlt 10 Jahre lang am **Ende** des Jahres 5 000 € auf ein Konto ein. Die Bank bietet einen Zinssatz von 4 %.
Wie hoch ist das Endkapital nach dieser Zeit?

Lösung 1: Gegeben: $R = 5000$ €; $p\,\% = 4\,\%$, $n = 10$
Gesucht: $K_{10}$

$K_{10} = \frac{R \cdot (q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{5000 \cdot (1{,}04^{10} - 1)}{1{,}04 - 1} = 60030{,}54$

*Der Rentenendwert beträgt 60 030,54 €.*

Beispiel 2: Das Guthaben bei einer Bank beträgt 12 000 €. Es werden 8 Jahre lang **am Ende** des Jahres 5 000 € eingezahlt. Die Bank gewährt 5 % Zinseszins.
Auf welchen Betrag ist das Anfangskapital nach 8 Jahren angewachsen?

Lösung 2: Wird ein ***vorhandenes*** Kapital durch nachschüssige Einzahlungen vermehrt, so gilt:

$$K_n = K_0 \cdot q^n + \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Gegeben: $R = 5000$ €; $p\,\% = 5\,\%$, $n = 8$, $K_0 = 12000$ €
Gesucht: $K_8$

$K_8 = K_0 \cdot q^n + \frac{R \cdot (q^{10} - 1)}{q - 1} = 12000 \cdot 1{,}05^8 + \frac{5000 \cdot (1{,}05^8 - 1)}{1{,}05 - 1} = 65475{,}00$

*Der Rentenendwert beträgt 65 475 €.*

Beispiel 3: Das Guthaben bei einer Bank beträgt 65 000 €. Es werden 8 Jahre lang **am Ende** des Jahres 5 000 € abgehoben. Die Bank gewährt 4 % Zinseszins.
Auf welchen Betrag ist das Anfangskapital nach 8 Jahren gesunken?

Lösung 3: Wird ein ***vorhandenes*** Kapital durch nachschüssige Abhebungen **vermindert**, so gilt:

$$K_n = K_0 \cdot q^n - \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Gegeben: $R = 5000$ €; $p\,\% = 4\,\%$, $n = 8$, $K_0 = 65000$ €
Gesucht: $K_8$

$K_8 = K_0 \cdot q^n - \frac{R \cdot (q^{10} - 1)}{q - 1} = 65000 \cdot 1{,}04^8 - \frac{5000 \cdot (1{,}04^8 - 1)}{1{,}04 - 1} = 42885{,}86$

*Der Rentenendwert beträgt 42 885,86 €.*

## Der Rentenendwert mit vorschüssiger Zahlung

Für den Endwert regelmäßiger vorschüssiger Zahlungen gilt:

$$K_n = \frac{R \cdot q \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Beispiel 4: Herr Maier zahlt $10$ Jahre lang **am Anfang** des Jahres $5\,000$ € auf ein Konto ein. Die Bank bietet einen Zinssatz von $4\,\%$.
Wie hoch ist das Endkapital nach dieser Zeit?

Lösung 4: Gegeben: $R = 5000$ €; $p\,\% = 4\,\%$, $n = 10$
Gesucht: $K_{10}$

$K_{10} = \frac{R \cdot q \cdot (q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{5000 \cdot 1{,}04 \cdot (1{,}04^{10} - 1)}{1{,}04 - 1} = 62431{,}76$

*Der Rentenendwert beträgt* $62\,431{,}76$ €.

Hinweis:

Diese Berechnung hätte auch mit den Formeln aus dem Kapitel **Ratensparen** ausgeführt werden können. Wir erinnern uns an die Formel mit

$$K_n = R \cdot (q^n + q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q)$$

Die Berechnung mit dieser Formel bringt:

$K_{10} = 5000 \cdot (1{,}04^{10} + 1{,}04^9 + 1{,}04^8 + \cdots + 1{,}04) = 5000 \cdot 12{,}48635 = 62431{,}76$

*Es ergibt sich derselbe Rentenendwert.*

Beispiel 5: Das Guthaben bei einer Bank beträgt $12\,000$ €. Es werden $8$ Jahre lang **am Anfang** des Jahres $5\,000$ € eingezahlt. Die Bank gewährt $5\,\%$ Zinseszins.
Auf welchen Betrag ist das Anfangskapital nach $8$ Jahren angewachsen?

Lösung 5: Wird ein ***vorhandenes*** Kapital durch vorschüssige Einzahlungen **vermehrt**, so gilt:

$$K_n = K_0 \cdot q^n + \frac{R \cdot q \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Gegeben: $R = 5000$ €; $p\,\% = 5\,\%$, $n = 8$, $K_0 = 12000$ €
Gesucht: $K_8$

$K_8 = K_0 \cdot q^n + \frac{R \cdot q \cdot (q^{10} - 1)}{q - 1} = 12000 \cdot 1{,}05^8 + \frac{5000 \cdot 1{,}05 \cdot (1{,}05^8 - 1)}{1{,}05 - 1} = 67862{,}29$

*Der Rentenendwert beträgt* $67\,862{,}29$ €.

Beispiel 6: Das Guthaben bei einer Bank beträgt $45\,000$ €. Es werden $7$ Jahre lang **am Anfang** des Jahres $5\,000$ € abgehoben. Die Bank gewährt $4\,\%$ Zinseszins.
Auf welchen Betrag ist das Anfangskapital nach $7$ Jahren gesunken?

Lösung 6: Wird ein ***vorhandenes*** Kapital durch vorschüssige Abhebungen **vermindert**, so gilt:

$$K_n = K_0 \cdot q^n - \frac{R \cdot q \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Gegeben: $R = 5000$ €; $p\,\% = 4\,\%$, $n = 7$, $K_0 = 45000$ €
Gesucht: $K_8$

$$K_7 = K_0 \cdot q^n - \frac{R \cdot q \cdot (q^{10} - 1)}{q - 1} = 45000 \cdot 1{,}04^7 - \frac{5000 \cdot 1{,}04 \cdot (1{,}04^7 - 1)}{1{,}04 - 1} = 18145{,}80$$

*Der Rentenendwert beträgt* $18\,145{,}80$ €.

## Der Rentenbarwert

Unter dem Rentenbarwert verstehen wir den einmalige Betrag $K_0$, der bei einer Rentenanstalt einzuzahlen ist, um $n$ Jahre lang entweder **am Ende** (nachschüssig) oder **am Anfang** (vorschüssig) eines jeden Jahres eine Rente von $R$ € beziehen zu können bei einem festen Zinssatz von $p\,\%$.

## Der Rentenbarwert mit nachschüssiger Auszahlung

Den nachschüssigen Barwert $K_0$ erhalten wir durch Abzinsung des nachschüssigen Rentenendwertes $K_n$.
Wir berechnen zunächst den Rentenendwert $K_n$ über die Formeln der Kapitalentwicklung mit festem Zinssatz:

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

Den so ermittelten Rentenendwert setzen wir dem Rentenendwert der nachschüssigen Zahlungen gleich.

$$K_0 \cdot q^n = \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Jetzt dividieren wir noch entsprechend den Regeln der Äquivalenzumformung von Gleichungen noch mit $q^n$ und erhalten dadurch die Rentenbarwert

$$K_0 = \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q^n \cdot (q - 1)}$$

Beispiel 7: Welcher einmalige Betrag (Barwert) ist bei einer Rentenanstalt einzuzahlen, um bei einem Zinssatz von $6\,\%$ $15$ Jahre lang am Ende eines jeden Jahres eine Rente von $5\,000$ € beziehen zu können?

Lösung 7: Gegeben: $R = 5000$ €, $n = 15$, $p\,\% = 6\,\%$
Gesucht: Rentenbarwert $K_0$

$$K_0 = \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q^n \cdot (q - 1)} = \frac{5000 \cdot (1{,}06^{15} - 1)}{1{,}06^{15} \cdot (1{,}06 - 1)} = 48561{,}24$$

Es muss ein Barwert in Höhe von $48\,561{,}24$ € bei der Rentenanstalt eingezahlt werden.

## Der Rentenbarwert mit vorschüssiger Auszahlung

Den vorschüssigen Barwert $K_0$ erhalten wir durch Abzinsung des vorschüssigen Rentenendwertes $K_n$.

Auch hier berechnen wir zunächst den Rentenendwert $K_n$ über die Formeln der Kapitalentwicklung mit festem Zinssatz:

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

Den so ermittelten Rentenendwert setzen wir dem Rentenendwert der vorschüssigen Zahlungen gleich.

$$K_0 \cdot q^n = \frac{R \cdot q \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Jetzt dividieren wir noch entsprechend den Regeln der Äquivalenzumformung von Gleichungen noch mit $q^n$ und erhalten dadurch die Rentenbarwert

$$K_0 = \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q^{n-1} \cdot (q - 1)}$$

Beispiel 8: Welcher einmalige Betrag (Barwert) ist bei einer Rentenanstalt einzuzahlen, um bei einem Zinssatz von $6\,\%$ $15$ Jahre lang am Anfang eines jeden Jahres eine Rente von $5\,000\,€$ beziehen zu können?

Lösung 8: Gegeben: $R = 5000\,€$, $n = 15$, $p\,\% = 6\,\%$

Gesucht: Rentenbarwert $K_0$

$K_0 = \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q^{n-1} \cdot (q-1)} = \frac{5000 \cdot (1{,}06^{15} - 1)}{1{,}06^{14} \cdot (1{,}06 - 1)} = 51474{,}92$

*Es muss ein Barwert in Höhe von $51\,474{,}92\,€$ bei der Rentenanstalt eingezahlt werden.*