

1. Ein Sparer zahlt jährlich jeweils am Jahresende 1000 € auf ein Sparkonto ein. Das Konto wird mit 2 % p.a. verzinst.

- Berechnen Sie den Kontostand des Sparers nach 30 Jahren.
- Wie viel Euro Zinsen hat er in diesen 30 Jahren Zinsen insgesamt erhalten?
- Nach den 30 Jahren entnimmt der Sparer jeweils am Ende eines Jahres eine feste Rate von 4000 €. Wie hoch ist das Restkapital nach 10 entnommenen Raten?

a) Kontostand nach 30 Raten $K_{30} = 0 + 1000 \cdot \frac{1,02^{30}-1}{0,02} = 40568,08 \text{ €}$

b) Zinsen für 30 Jahre: $Z = 40568,08 - 30000 = 10568,08 \text{ €}$

- c) Restkapital nach 10 Raten

$$K_{10} = Kq^{10} - R \frac{q^{10}-1}{q-1} \quad K_{10} = 40568,08 \cdot 1,02^{10} - 4000 \frac{1,02^{10}-1}{0,02}$$

$$K_{10} = 40952,26\text{€} - 43798,88\text{€} = 5653,38$$

2. Ein Kredit über 110.000 € wird durch feste jährlich nachschüssige Raten von 10.000 € vollständig getilgt. Der Kredit wird mit 4 % p. a. verzinst.

- Wie lang ist die Laufzeit des Kredits in Jahren?
- Nach 10 Jahren kann der Kredit vorzeitig zurückgezahlt werden. Wie groß wäre dann die fällige Restschuld?
- Wie viel Euro Zinsen wurden in den ersten 10 Jahren gezahlt?

$$0 = Kq^n - R \frac{q^n-1}{q-1} \quad 0 = Kq^n(q-1) - R \cdot q^n + R$$

$$q^n = \frac{R}{R-K(q-1)} \quad n = \frac{\ln\left(\frac{R}{R-K(q-1)}\right)}{\ln q}$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{10000}{10000-110000 \cdot 0,04}\right)}{\ln 1,04} = 14,78 \rightarrow 15 \text{ Jahre}$$

Restschuld nach 10 Jahren

$$K_{10} = Kq^{10} - R \frac{q^{10}-1}{q-1} \quad K_{10} = 110000 \cdot 1,04^{10} - 10000 \frac{1,04^{10}-1}{0,04} = 42765,80 \text{ €}$$

Zinsen in 10 Jahren

Zahlung von 10 Raten: 100000 €

Getilgter Kredit: 110000 - 42765,80 = 67234,20

Zinsen: 100000 - 67234,20 = 32765,80 €

3. Eltern richten für ihr Kind zum 6. Geburtstag ein Sparkonto ein, in dem sie 2500 € auf das Sparkonto einzahlen. Die Bank gewährt für das Sparkonto einen festen Zinssatz.

Am 10. Geburtstag des Kindes hat das Konto ein Guthaben von 2748,78 €, wobei das Anfangskapital die einzige Einzahlung auf das Sparkonto war.

- a) Wie hoch ist der Zinssatz in % (gerundet auf eine Dezimalstelle nach dem Komma).

$$q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \quad q = \sqrt[4]{\frac{2748,78}{2500}} = 1,024 \quad p\% = 2,4\%$$

Beginnend mit dem 11. Geburtstag des Kindes zahlen die Eltern an jedem Geburtstag eine feste Sparrate R auf das Sparkonto ein, so dass das Kind am 18. Geburtstag nach Zahlung der letzten Rate über ein Guthaben von 10000 € verfügt.

b) Wie hoch ist diese Sparrate R?

$$K_n = K_0 \cdot q^n + R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad 10000 = 2748,78 \cdot 1,024^8 + R \cdot \frac{1,024^8 - 1}{1,024 - 1}$$

$$6676,93 = R \cdot 8,7052 \rightarrow R = 767,00 \text{ €}$$

c) Wie viel Prozent des Guthabens am 18. Geburtstag sind von den Eltern gezahltes Eigenkapital?

$$\text{Von Eltern gezahlt: } 2500 + 8 \cdot 767,00 = 8836,00 \text{ €} \rightarrow 88,36\%$$

4. Ein Bauherr erhält für den Bau seines Hauses von der Bank einen Kredit von 120 000 €

Für das Darlehen gelten folgende Vereinbarungen:

- (1) Der Kredit hat eine Laufzeit von 15 Jahren.
- (2) Es gilt ein konstanter Zinssatz für die gesamte Laufzeit.
- (3) Während der ersten 3 Jahre sind der Bank nur jedes Jahr die Zinsen zu erstatten.

Anschließend (beginnend mit dem vierten Jahr) ist durch den Kreditnehmer nach jedem abgelaufenen Jahr eine feste jährliche Tilgungsrate R zu zahlen, so dass der Kredit am Ende der Laufzeit vollständig getilgt ist.

1. Wie hoch ist der Zinssatz (in %), wenn der Kreditnehmer während der ersten 3 Jahre insgesamt 11520 € an Zinsen zahlt?
2. Wie hoch ist die jährliche Tilgungsrate R, die erstmalig am Ende des 4. Jahres zu zahlen ist?
3. Welche Summe zahlt der Kreditnehmer während der Laufzeit insgesamt an die Bank zurück?

$$1. \quad 120000 \cdot 3 \cdot \frac{p}{100} = 11520 \text{ €} \rightarrow p = 3,2 \rightarrow p\% = 3,2\%$$

$$2. \quad S_{12} = Sq^{12} - R \frac{q^{12}-1}{q-1} \rightarrow 0 = Sq^{12} - R \frac{q^{12}-1}{q-1} \rightarrow R = \frac{Sq^{12}(q-1)}{q^{12}-1}$$

$$R = \frac{120000 \cdot 1,032^{12}(1,032 - 1)}{1,032^{12} - 1} = \frac{5603,86}{0,4593} = 12199,83 \text{ €}$$

3. Jahr 1 bis 3: Zinsen von 11520 €
- Jahr 4 bis 15: $12 \cdot 12199,83 = 146397,93 \text{ €}$
- Gesamt: 157917,93 €

5. Eine Firma investiert in eine Pizzeria und hat dafür einen Kredit in Höhe von 100.000 Euro aufgenommen. Die Bank veranschlagt eine Verzinsung von 3% und eine vollständige Tilgung in 15 Jahren.

- a) Berechnen Sie die Rate, die die Klug GmbH jeweils jährlich am Jahresende zu bezahlen hat.
- b) Erstellen Sie den Tilgungsplan für die Jahre 10 und 11. Übernehmen Sie dafür die nachfolgende Tabelle auf Ihr Arbeitsblatt und füllen Sie die diese aus.

Jahr	Schuld am Jahresanfang	Zinsen in €	Rate	Schuld am Jahresende
10				
11				

c) Wie viel Euro Zinsen erhält die Bank in den ersten 10 Jahren?

a)

$$0 = Sq^n - R \frac{q^n - 1}{q - 1} \rightarrow R = \frac{Sq^n(q - 1)}{q^n - 1}$$

$$R = \frac{100000 \cdot 1,03^{15}(1,03 - 1)}{1,03^{15} - 1} = \frac{4673,902}{0,558} = 8376,66 \text{ €}$$

b)

$$S_9 = Sq^9 - R \frac{q^9 - 1}{q - 1} = 100000 \cdot 1,03^9 - 8376,66 \cdot \frac{1,03^9 - 1}{0,03}$$

$$= 130477,32 - 85099,38 = 45377,96 \text{ €}$$

Jahr	Schuld am Jahresanfang	Zinsen	Rate	Schuld am Jahresende
10	45377,96 €	1361,44 €	8376,66 €	38362,64 €
11	38362,64 €	1150,88 €	8376,66 €	31136,86 €

→ Je Wert 0,5 Punkte

- c) Einzahlungen: $10 \cdot 8376,66 = 83766,60 \text{ €}$
 Zurückgezahlter Kredit: $100000 - 38362,64 = 61637,36 \text{ €}$
 Zinsen: $83766,60 - 61637,36 = 22129,22 \text{ €}$