Regel von l'Hospital

1. Anwendung

Die Regel von l’Hospital setzt man ein, wenn man den Grenzwert einer Funktion vom Typ

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

berechnen soll und als Ergebnis einen unbestimmten Ausdruck wie $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$ erhält.

2. Satz

Regel von l'Hospital

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g'(x)}{h'(x)}$$

Die Regel von l'Hospital gilt auch, wenn es sich um Grenzübergänge vom Typ $x \to +\infty$ oder $x \to -\infty$ handelt.

3. Anleitung

1. **Zählerfunktion $g(x)$ und Nennerfunktion $h(x)$ getrennt voneinander ableiten**
2. **Grenzwert von $\frac{g'(x)}{h'(x)}$ berechnen**

Anmerkungen

- Es gibt Fälle, in denen erst die mehrmalige Anwendung dieser Grenzwertregel zum Ziel führt.
- Es kann vorkommen, dass die Regel versagt. Nicht bei jeder Aufgabenstellung lässt sich mithilfe der Regel von l'Hospital ein Grenzwert berechnen.

4. Beispiele

Beispiel 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{0}{0}$$

Aufgrund des unbestimmten Ausdrucks $\frac{0}{0}$ können wir die Regel von l'Hospital anwenden, d. h. wir leiten den Zähler und den Nenner getrennt voneinander ab und berechnen anschließend den Grenzwert des neuen Terms:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = \lim_{x \to 0} e^x = 1$$

Beispiel 2

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Aufgrund des unbestimmten Ausdrucks $\frac{\infty}{\infty}$ können wir die Regel von l'Hospital anwenden, d. h. wir leiten den Zähler und den Nenner getrennt voneinander ab und berechnen anschließend den Grenzwert des neuen Terms:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

5. Unbestimmte Ausdrücke umformen

Die Regel von l'Hospital gilt zwar nur für unbestimmte Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$, die anderen unbestimmten Ausdrücke

- $0 \cdot \infty$ bzw. $\infty \cdot 0$
- $\infty - \infty$
- $0^0,\ \infty^0, 1^\infty$

können jedoch mithilfe sog. elementarer Umformungen so umgeformt werden, dass man die Regel von l'Hospital anwenden kann.

Die folgende Tabelle zeigt die jeweilige Funktion, ihren Grenzwert sowie die Formel für die elementare Umformung, die nötig ist, um die Regel von l'Hospital anwenden zu können:

Funktion $f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	**Elementare Umformung**
$g(x) \cdot h(x)$	$0 \cdot \infty$ bzw. $\infty \cdot 0$	$\frac{g(x)}{\frac{1}{h(x)}}$ bzw. $\frac{h(x)}{\frac{1}{g(x)}}$
$g(x) - h(x)$	$\infty - \infty$	$\frac{\frac{1}{h(x)} - \frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{g(x) \cdot h(x)}}$
$g(x)^{h(x)}$	$0^0,\ \infty^0, 1^\infty$	$e^{h(x) \cdot \ln g(x)}$