Aufgabe (Schwierigkeitsgrad mittel)

Ein Unternehmen produziert mit der Produktionsfunktion

$Q(L,K) = L^{0,5} \cdot K^{0,5}$ zur Erinnerung $Q(L,K) = \sqrt{L} \cdot \sqrt{k}$

- L = Arbeitseinheiten (Lohneinheiten)
- K= Kapitaleinheiten (Geldeinheiten)

Das Unternehmen hat ein Budget von 100 Geldeinheiten als Kapital

- Preis der Arbeit sei $\omega = 5$
- Preis des Kapitals sei $\gamma = 5$

Wie viele Einheiten Arbeit und Kapital sollen eingesetzt werden, um die Produktion zu maximieren? Wie groß ist die maximale Produktionsmenge?

Ausführliche Lösung (mit Erklärungen)

1. Budgetrestriktion

$Allgemein\colon\ \omega \cdot L + \gamma \cdot K = C$

- C = Budget (Geld das zur Verfügung steht) →Input
- Q = Produktionsmenge → Output

2. Optimum Bedingung

Bei der Cobb-Douglas-Funktion gilt im Optimum:

$$\frac{Grenzprodukt\ der\ Arbeit}{Grenzprodukt\ des\ Kapitals} = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{GP_L}{GP_K}$$

<u>Grenzprodukte berechnen:</u>

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = GP_L\ (1. Ableitung\ von\ Q(L,K) nach\ L = 0,5 \cdot L^{-0,5} \cdot K^{0,5}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = GP_K\ (1. Ableitung\ von\ Q(L,K) nach\ K = L^{0,5} \cdot 0,5 \cdot K^{-0,5}$$

Verhältnis bilden:

$\frac{GP_L}{GP_K} = \frac{0{,}5 \cdot L^{-0{,}5} \cdot K^{0{,}5}}{L^{0{,}5} \cdot 0{,}5 \cdot K^{-0{,}5}} = \frac{K}{L}$ (Potenzgesetze!!)

Im Optimum gilt:

$\frac{\omega}{\gamma} = \frac{5}{5} = 1$

Gleichsetzen mit den Preisen:

$\frac{K}{L} = 1 \rightarrow K = L$

Mit diesem Ergebnis können wir nun weiterabreiten:

$$\omega \cdot L + \gamma \cdot K = C$$

$5L + 5K = 100 \quad \rightarrow 10\,L = 100 \quad \rightarrow L = !\,0; K = 10$

Produktionsmaximum berechnen – (Einsetzen in die Produktionsfunktion)

$$Q(L, K) = L^{0{,}5} \cdot K^{0{,}5}$$

somit

$Q(L, K) = L^{0{,}5} \cdot K^{0{,}5}$

$Q(max) = 10^{0{,}5} \cdot 10^{0{,}5} = 10$

Ökonomische Bedeutung

Das Maximum entsteht genau dort, wo:

👉 **Grenzprodukt pro Euro gleich ist**

- Der letzte Euro für Arbeit bringt genauso viel wie der letzte Euro für Kapital
- Es gibt **keine bessere Umverteilung mehr**

Wenn z. B. mehr Arbeit als Kapital eingesetzt würde:

- Arbeit hätte **abnehmenden Grenzertrag**
- Kapital wäre **zu knapp**
- → Produktion wäre niedriger ❌

3. Ergebnis

- Optimale Arbeit: L=10L = 10L= 10 Lohneinheiten
- Optimales Kapital: K=10K = 10K= 10 Geldeinheiten
- Maximale Produktion: Q=10Q = 10Q= 10 ME Output

3D Ansicht der Produktionsfunktion Q(L,K) in Geogebra als f(x,y) dargestellt