

Definition:

Die Ober- und Untersumme approximieren den Flächeninhalt unter einer Kurve $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ durch n Rechtecke. Die Intervallbreite sei $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ und den Funktionswerten y_i am Rand der Intervalle (min/max im Teilintervall) lauten die Summenformeln:

- Obersumme $O_n = \sum_{i=1}^n y_i \cdot \Delta x$ mit $y_i = \max(f(\Delta x_i))$
- Untersumme $U_n = \sum_{i=1}^n y_i \cdot \Delta x$ mit $y_i = \min(f(\Delta x_i))$

Untersumme U_n

Rechtecke liegen unterhalb des Graphen. Man nutzt die Minima in den Intervallen. Bei monoton steigenden Funktionen ist es der linke Rand.

Obersumme O_n

Rechtecke liegen oberhalb des Graphen. Man nutzt die Maxima in den Intervallen. Bei monoton steigenden Funktionen ist es der rechte Rand.

Grenzwert: Für $n \rightarrow \infty$ nähern sich beide Summen dem exakten Integralwert an.

Aus

$$\sum_{i=1}^{n \rightarrow \infty} y_i \cdot \frac{b-a}{n}$$

wird

$$\int_a^b f(x) dx$$

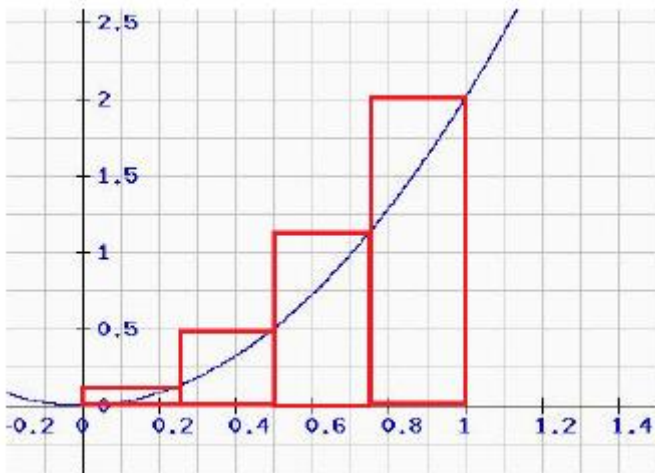
Beispiel:

Gesucht wird der Wert der Obersumme und Untersumme O_4 sowie U_4 (also für 4 Rechtecke) für die Funktion

$$f(x) = 2x^2$$

im Intervall $[0,1]$

Graphik zum Sachverhalt:

Obersumme

1. Berechnung von $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$$\Delta x = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$$

2. Einsetzen in die Formel der Obersumme

$$O_4 = \sum_{i=1}^4 y_i \cdot \Delta x \quad \text{mit } y_i = \max(f(\Delta x_i))$$

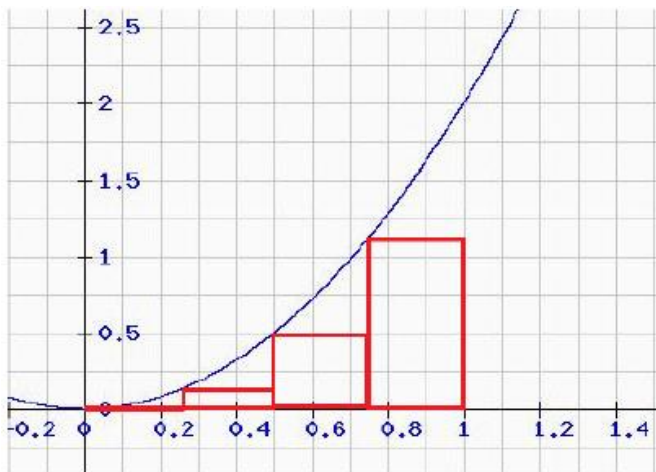
$$O_4 = \frac{1}{4} \cdot \left(f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{2}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{4}{4}\right) \right)$$

$$O_4 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 2 \cdot \left(\frac{i}{4}\right)^2$$

$$O_4 = \frac{1}{4} \cdot \left(2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{4}{4}\right)^2 \right)$$

$$O_4 = \frac{15}{16}$$

Untersumme



3. Berechnung von $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$$\Delta x = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$$

4. Einsetzen in die Formel der Obersumme

$$U_4 = \sum_{i=1}^4 y_i \cdot \Delta x \quad \text{mit } y_i = \min(f(\Delta x_i))$$

$$U_4 = \frac{1}{4} \cdot (f(0) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{2}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right))$$

$$U_4 = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^3 2 \cdot \left(\frac{i}{4}\right)^2$$

$$U_4 = \frac{1}{4} \cdot (2 \cdot (0)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2)$$

$$U_4 = \frac{7}{16}$$

Frage: Wie genau ist der Flächeninhalt mit $n = 4$ durch die Ober- und Untersumme berechnet worden?

Aufgabe: Verwenden Sie den Taschenrechner und berechnen Sie den Wert der Obersumme für $n = 50$

$$O_{50} = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} 2 \cdot \left(\frac{i}{50}\right)^2 \quad \text{Lösung: } 0,6868$$